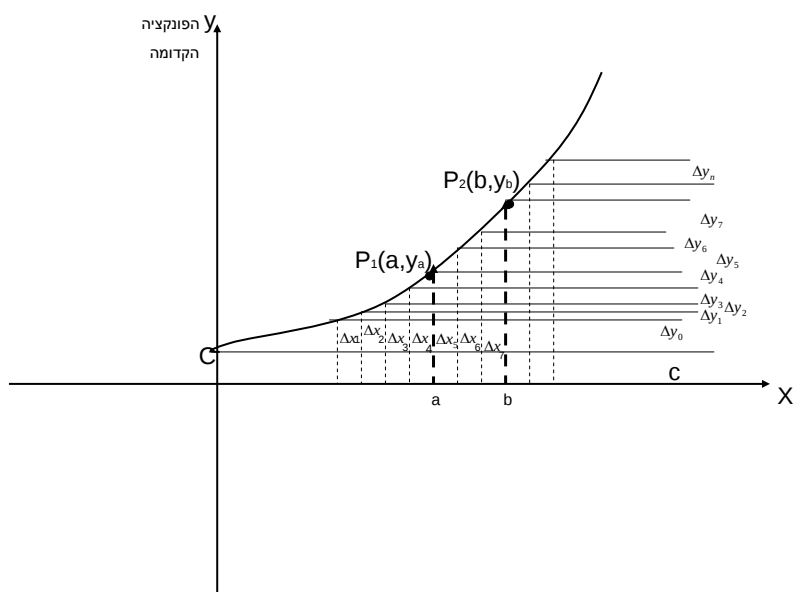


חוברת זו מוקדשת
לנכדתי האהובה
פז
הלומדת ברמת-גן

שלמה מלמן

חשבון אינטגרלי

חוברת עזר במתמטיקה



© כל הזכויות שמורות – מאי 2011

ניתן לעשות בחוברת זו כל שימוש שהוא, פרט לשימוש מסחרי, ובלבד שיציין שם המקור.

חוברת זו – כקודמותיה – מטרתה להקנות לתלמיד הבנה מעמיקה למשמעות פעולת האינטגרל.

חוברת זו אינה באה במקום ספר הלימוד אשר ברשותכם, אלא רק כתוספת לו.

השתדלתי לתת הסברים בשפה פשוטה וברורה והשתמשתי הרבה בגרפים על מנת להמחיש זאת.

הדוגמאות נבחרו בקפידה ומתוך מחשבה כדי להראות ולהבהיר את הנאמר.

בחוברת, לא הקפתי את כל הנושאים, אלא רק את הנושאים העיקריים אשר יקנו הבנה לדרך פעולת האינטגרל ויסבירו לתלמיד כיצד להתמודד עם בעיות שונות.

אני תקווה כי חוברת זו תתרום ולו במעט לקדם את התלמידים ושתוציא את "הפחד" מלימוד מתמטיקה.

באם תתגשם תקוותי זו ויוקל על התלמידים בהבנת החומר - יהיה זה שכרי.

תוכן הענינים

3	מבוא
4	אינטגרל לא מסוים
7	אינטגרציה בסיסית
8	כללים לפעולת האינטגרל
10	שיטת ההצבה
11	אינטגרציה לפי חלקים
11	אינטגרציה על ידי פירוק לגורמים
13	אינטגרלים טריגונומטריים
14	הצבות טריגונומטריות
17	מציאת קבוע האינטגרל
18	אינטגרל של פונקציה מעריכית ולוגריתמית
20	האינטגרל המסוים
26	שטח המוגבל בין שתי פונקציות
32	חישוב ע"י פריסה לרצועות
35	נפח של גוף סיבוב
42	אורך קשת
44	נפח סביב ישר כלשהוא

מבוא

האינטגרל היא פעולה מתמטית על פונקציה. והיא ככל שאר פעולות המתמטיקה: חיבור, חיסור, כפל, חילוק, הוצאת שורש, העלאה בחזקה, לוגריתמים, גזירה וכו'.

הפעולות המתמטיות הינם בצמדים, כאשר לכל פעולה הצמוד הוא מעין ניגוד. אם ניקח למשל חיבור – נוסיף למשהו נתון – נקבל תוצאה כלשהיא. ואם על התוצאה נבצע פעולת חיסור (פעולה מנוגדת) נחזור אל הנתון.

הנתון a נוסיף לו 3 נקבל $a+3=b$ ונוריד מהתוצאה b את התוספת 3 ונקבל בחזרה את $b-3=a$

צמדים מנוגדים הם: כפל וחילוק, שורש והעלאה בחזקה, לוגריתמים ואכספוננט וכך גם פעולת הנגזרת והאינטגרל הם צמד מנוגד הפועל על פונקציה.

אם ניקח פונקציה $y=3x+5$ ונגזור נקבל $y'=3$ אם על התוצאה נבצע פעולת אינטגרל נחזור שוב לפונקציה y (עד לרמה של קבוע). לגבי הצמדים חיבור- חיסור, כפל – חילוק, הוצאת שורש – העלאה בחזקה אנו מבינים את המשמעות ואילו לוגריתמים ומעריך זה צמד קצת יותר קשה להבנה. ועוד יותר קשה להבין את הצמד הנגזרת – והאינטגרל.

פעולת הנגזרת, ראינו, נותנת לנו את $tg\alpha$, שהוא השיפוע של המשיק בנקודה, ומה נותנת לנו פעולת האינטגרל? על זה באה חוברת זו לתת תשובה.

את פעולת האינטגרל מסמנים ב-

ולכן אם נסתכל על הפונקציה $y=3x+5$ ראינו שהנגזרת היא $y'=3$ אם נבצע אינטגרל על $y'=3$ נקבל $\int 3dx=3x$ אבל במקור יש לנו עוד +5, אשר בגזירה אינו מתבטא.

ניקח את הפונקציה $y=3x-9$ ונגזור נקבל $y'=3$, זו אותה הנגזרת ולכן האינטגרל יהיה אותו הדבר אבל הפונקציות נבדלות בקבוע.

בפעולת האינטגרל אין לנו אפשרות לדעת מהו הקבוע ולכן נכתוב את תוצאת האינטגרל $\int 3dx=3x+c$. c הוא קבוע האינטגרל.

וזו נקרא אינטגרל לא מסוים

אינטגרל לא מסוים

ראינו כי פעולת האינטגרל היא מנוגדת לגזירה לכן $\int y'(x)dx = y$
 פעולת האינטגרל כמו שאר הפעולות המתמטיות היא פעולה בפני עצמה וכשם
 שאפשר לבצע פעולת חילוק מבלי תלות בכפל (הצמוד) כך גם לגבי האינטגרל.

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

אם נסתכל על הנגזרת

$$dy = y' dx$$

$$\int dy = \int y' dx$$

וכאשר נבצע אינטגרל

$$y = \int y' dx$$

אחרי ביצוע אינטגרל חוזרים לפונקציה המקור y .
 כאשר מבצעים אינטגרל על פונקציה, הפונקציה המתקבלת נקראת **פונקציה
 קדומה**.

$$y = 3x^2 + 5$$

אם נקח לדוגמא את הפונקציה

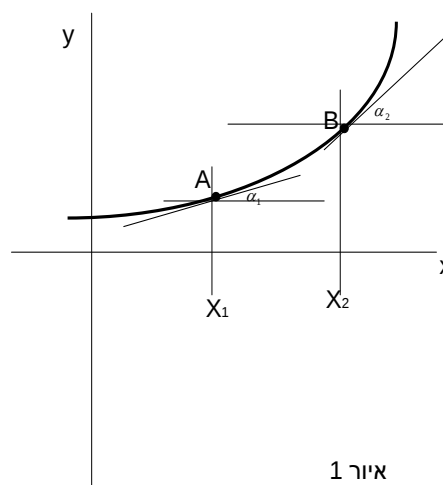
$$y' = 6x$$

וכאשר נבצע אינטגרל על הנגזרת נקבל את משפחת הפונקציה הקדומה

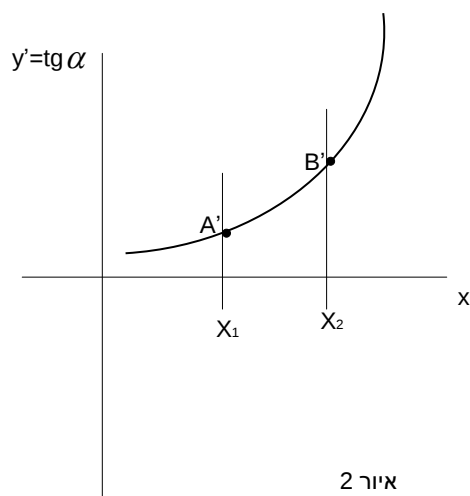
$$\int 6x dx = 6 \frac{x^2}{2} + C$$

C יכול להיות כל מספר קבוע ולכן מתקבלת משפחת פונקציות, והוא נקרא
 קבוע האינטגרל.

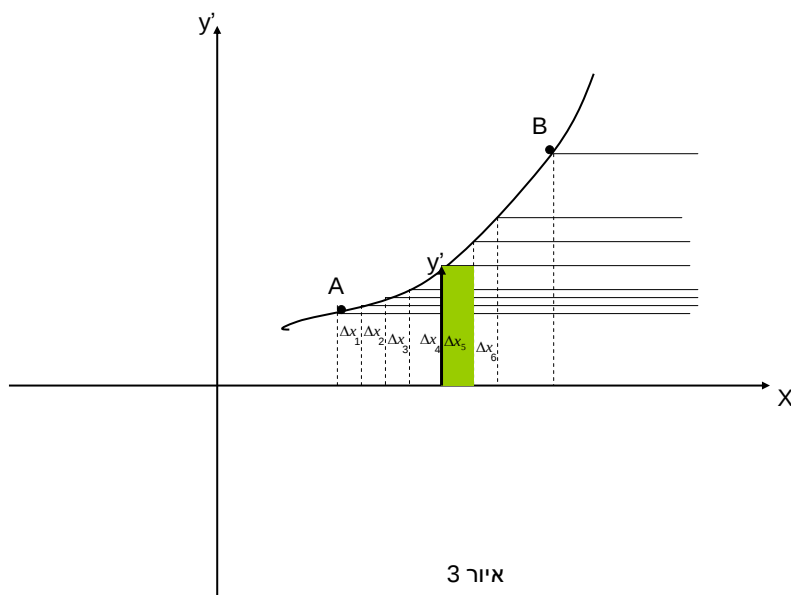
נראה את המשמעות הפיזית של הנגזרת ושל האינטגרל.
 נניח נתונה פונקציה כמתוארת בגרף



הנגזרת נותנת לנו את שיפוע הקו בנקודות A ו B שזה למעשה $tg\alpha$ ואם נסתכל על פונקצית הנגזרת



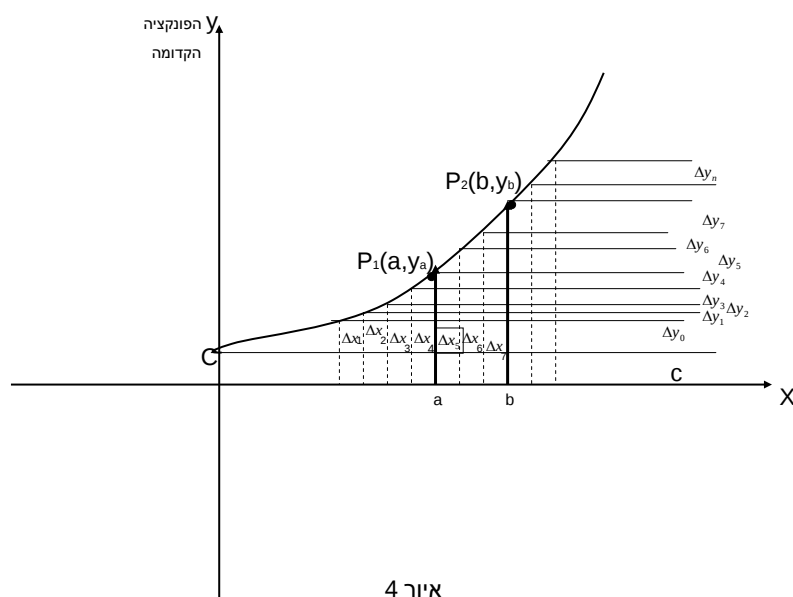
ה y' הוא ה $tg\alpha$. וכפי שראינו $y = \int y' dx$ שהיא הפונקציה הקדומה. נתבונן על הפונקציה y' וניקח רק חלק מהגרף



נחלק את הקטע לחלקים של Δx . הקו האנכי מציר ה x ועד לעקומה הוא y' (ראה איור 3 חץ) ולכן המכפלה $y' \Delta x$ היא בעצם שטח המלבן שרוחבו Δx וגובהו y' . ראה המלבן המודגש בגרף.

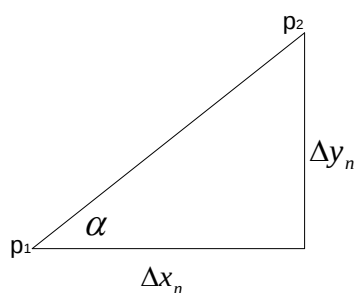
אנו יודעים כי $y' = tg\alpha$

אם נסתכל עכשיו על הפונקציה הקדומה הגרף יראה



איור 4

אם ניקח שתי נקודות סמוכות p_1 ו p_2 נקבל (בקירוב טוב) משולש ישר זווית שבסיסו הוא Δx והאנך הוא Δy וזוית המשיק בנקודה P היא α וייראה (בהגדלה) כך:



איור 5

כאשר $\Delta x \rightarrow 0$ הנקודות p_1 ו p_2 מתקרבות זו לזו ואפשר לראות את הקו $p_1 p_2$ כקו ישר אשר משמש כיתר המשולש. ואז $\Delta y = \Delta x \cdot \tan \alpha$ נותן לנו את הניצב Δy .

בנקודה p_1 ערך הפונקציה y הוא **סכום** כל ה- Δy ים הקודמים ובתוספת c שהוא האיבר החופשי, וזה גם קבוע האינטגרציה. (ראה איור 4).
(לדוגמא אם יש לנו פונקציה $y = 3x^3 - 5x^2 + 9$ האיבר החופשי הוא **+9**.
וזו בעצם נקודת מפגש הפונקציה עם ציר ה- y (שם $x=0$)
ולכן ערך הפונקציה בנקודה P_n יהיה

$$y = \Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y + \dots + \Delta y_n + C$$

ופעולת האינטגרל נותנת לנו את **סכום** כל ה- Δy עד לנקודה (ראה איור 4).
את $y' \Delta x$ ראינו כי הוא **שטח המלבן בפונקצית הנגזרת** y' ו- Δy בפונקציה
הקדומה. מכאן נוכל לראות כי $\int y' dx = \Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y + \dots + \Delta y_n + c$
במילים אחרות פעולת האינטגרל נותנת לנו את **סכום** המלבנים שזה השטח
ש"מתחת לעקומה" **פונקצית הנגזרת** בין הנקודות p_1 ו- p_2 וציר ה- x .
וזה ערך ה- y בפונקציה הקדומה. (ראה איור 4).
שתי הפעולות הנוגדות: **הנגזרת** נותנת לנו את שיפוע המשיק בנקודה על
הפונקציה, והאינטגרל נותן לנו את השטח ש"מתחת לעקומה" בפונקצית
הנגזרת שלה.

כאשר ה- y' שלילי ה- Δy השייך לו בפונקציה הקדומה הינו שלילי, כלומר זה
מופחת מה**סכום** (האינטגרל), ובפונקצית הנגזרת **שטח המלבן** $y' \Delta x$ גם
הוא שלילי ואינו מ"**תחת**" לעקומה אלא בין הגרף שמתחת לציר וציר ה- x .
ובסך הכל זה נגרע **מסכום** המלבנים. נראה בהמשך ביתר פירוט.
פעולת האינטגרל יכולה להתבצע על כל פונקציה שהיא פולינומים,
לוגריתמיים, אקספוננטים, טריגונומטריים וכו'.

אינטגרציה בסיסית

נראה אינטגרציה על פולינומים

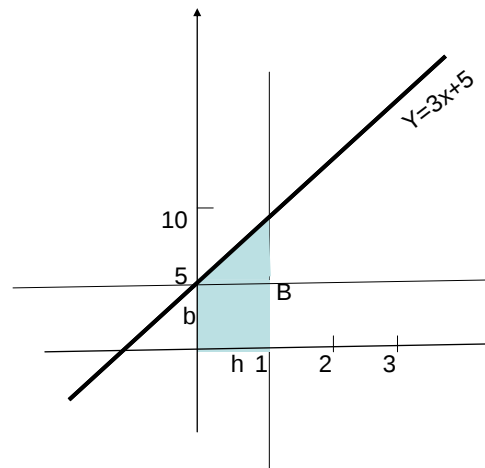
נניח כי יש לנו פונקציה. נסתכל עליה כפונקצית **נגזרת** $y = 3x + 5$ 1)

ונבצע עליה אינטגרל נקבל $Y = \int (3x + 5) dx = 3 \frac{x^2}{2} + 5x + C$ 2)

נוכל לבדוק זאת באם נבצע גזירה של התוצאה $\frac{dy}{dx} = \frac{6x}{2} + 5 = 3x + 5$

ואכן מקבלים את הפונקציה.

אנו רואים כי באינטגרציה של (1) אנו מקבלים פונקציה (2) מסדר שני
(ריבועית) ואיבר חופשי $-C$ איבר שאינו מכיל משתנה - ולכן בגזירה הוא נופל.
כלומר משפחת פונקציות ריבועיות הנבדלות ב C .



איור 6

$$Y = \frac{3}{2}x^2 + 5x + c =$$

נבדוק את האינטגרל כאשר $x=1$ נציב ב-(2) ונקבל

$$\frac{3}{2} * 1^2 + 5 * 1 + c = \frac{13}{2} + c$$

ונחשב את השטח מתחת לעקומה בדרך גיאומטרית עד $x=1$ (ראה איור 6) יש לנו טרפז ישר זווית הבסיסים הם B ו b והגובה הוא h

$$S_{\text{טרפז}} = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{[y(1) + y(0)]1}{2} = \frac{8+5}{2} = \frac{13}{2}$$

ולכן שטח הטרפז הוא $\frac{13}{2}$ וכן שטח האינטגרל מתאים לשטח (פרט ל C).

מספר כללים לפעולת האינטגרל

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

1. פונקציה $y = f(x) \pm g(x)$ כאשר נבצע $\int$ נקבל

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

2. פונקציה $y = a * f(x)$ וכשנבצע $\int$ נקבל

$$\int [x^n + x^m + K] dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{m+1}}{m+1} + Kx$$

3. פולינום $y = x^n + x^m + K$ באינטגרל

תוצאות של אינטגרל אנו יכולים לקבל על פי הנגזרות שאנו מכירים למשל

$$\int -\frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} + c \quad \text{הנגזרת של } y = \frac{1}{x} \text{ היא } y' = -\frac{1}{x^2} \text{ ולכן}$$

אפשר גם לראות זאת כך $-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$ ולפי פולינום

$$\int -\frac{1}{x^2} dx = \int -x^{-2} dx =$$

$$= -\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = x^{-1} + c = \frac{1}{x} + c$$

כמו כן לגבי $y = \sin(x)$ הנגזרת $y' = \cos(x)$ ולכן $\int \cos(x) dx = \sin(x)$
דוגמא

1. חשב את האינטגרל של $y = \frac{-2}{x^3} - \frac{1}{x^2} + 2x$

$$\int \left[\frac{-2}{x^3} - \frac{1}{x^2} + 2x \right] dx = \int \frac{-2}{x^3} dx - \int \frac{1}{x^2} dx + \int 2x dx =$$

$$= -2 \frac{x^{-3+1}}{-3+1} - \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 2 \frac{x^2}{2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + x^2 + C$$

2. חשב את האינטגרל של $y = 2x^2 - 5x + 3$

$$\int [2x^2 - 5x + 3] dx = \int 2x^2 dx - \int 5x dx + 3 \int dx = 2 \frac{x^3}{3} - 5 \frac{x^2}{2} + 3x + c$$

את הפונקציות הבאות נראה ביתר פירוט בהמשך.

3. פונקציות טריגונומטריות $y = \sin(x)$ ה יהיה $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$

$y = \tan(x)$ ה יהיה $\int \tan(x) dx = \ln \frac{1}{\cos(x)} + c$

$y = \cot(x)$ ה יהיה $\int \cot(x) dx = \ln(\sin x) + c$

4. פונקציות לוגריתמיות $y = \ln x$ הנגזרת היא $y' = \frac{1}{x}$

לכן אם נתונה פונקציה מהסוג $y = \frac{1}{x+a}$ ה יהיה $\int \frac{1}{x+a} dx = \ln(x+a) + c$

וכך לגבי $y = a^x$ ה יהיה $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

וכמובן ל $y = e^x$ ה יהיה $\int e^x dx = e^x + c$

5. חשב את האינטגרל של $y = \frac{x+3}{x+2}$

נכתוב זאת כך $\frac{x+2+1}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}$ בתנאי ש $x \neq -2$ ונבצע

$$\int \left(1 + \frac{1}{x+2} \right) dx = x + \ln|x+2| + c$$

הערה: בפונקציה ה-X יכול לקבל כל ערך $x \neq -2$ לכן לאחר ה ניקח ערך מוחלט ל $\ln$ כי הוא רק למספרים חיוביים.

שיטת ההצבה

לפעמים יהיה לנו נוח לעשות הצבת עזר ולאחר מכן לחזור שוב למקור שים לב : עלינו גם לשנות את ה dx למשתנה החדש לדוגמא

1. חשב את האינטגרל של $y = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$ נעשה הצבה $u = x + 3$

עכשיו נגזור לפי $\frac{du}{dx}$ ונקבל $\frac{du}{dx} = 1$ או $dx = du$

נעשה $\int \frac{1}{\sqrt{x+3}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} du =$ (כאשר $dx = du$)

ולפי פולינום $\int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2u^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{u} + c$

נחזיר את ההצבה ונקבל $\int \frac{1}{\sqrt{x+3}} dx = 2\sqrt{x+3} + c$

2. חשב את האינטגרל $\int 3x\sqrt{1-2x^2} dx$ נעשה הצבה $u = 1 - 2x^2$

נגזור $\frac{du}{dx} = -4x$ או $dx = \frac{du}{-4x}$

נציב ב $\int 3x\sqrt{1-2x^2} dx = \int 3x\sqrt{u} * \frac{du}{-4x}$

ה x מצטמצם ($x \neq 0$) ומקבלים

$$-\frac{3}{4} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{-\frac{3}{4} u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = -\frac{1}{2} \sqrt{u^3} + c$$

ועכשיו יש להציב בחזרה את $u = 1 - 2x^2$

3. חשב את $\int \frac{(4x+5)}{\sqrt[3]{2x^2+5x}} dx$ שים לב המונה הוא הנגזרת שבשורש

לכן אנו נציב $u = 2x^2 + 5x$

נגזור $\frac{du}{dx} = 4x + 5$ או $dx = \frac{du}{4x+5}$ ונציב

נצמצם בתנאי ש $4x+5 \neq 0$

$$\int \frac{(4x+5)}{\sqrt[3]{2x^2+5x}} dx = \int \frac{4x+5}{\sqrt[3]{u}} * \frac{du}{4x+5} = \int u^{-\frac{1}{3}} du =$$

$$= \frac{u^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{2} u^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{u^2} + c$$

ומכאן מציבים חזרה את u .

אינטגרציה לפי חלקים

$$y = u \cdot v$$

אנו מכירים את נוסחת הגזירה של

$$(uv)' = y' = u'v + v'u$$

מאחר u ו v הן פונקציות של x ואנו גוזרים לפי $\frac{d}{dx}$ נכתוב זאת

$$dy = vdu + u dv$$

$$\int dy = \int vdu + \int u dv$$

וכאשר נבצע אינטגרל

$$y = \int vdu + \int u dv$$

$$\int u dv = uv - \int vdu \quad \text{נציב ונעביר אגף ונקבל} \quad y = uv$$

יודעים כי $y = uv$ לכן כאשר יש לנו מכפלה של שתי פונקציות נוכל לבחור את מכפלת הפונקציות כ- $u'v$ לדוגמא

$$1. \quad \text{נתון } y = x \cdot \sin x \quad \text{חשב את האינטגרל} \quad \int x \sin x dx$$

$$\text{נבחר את } dv = \sin x dx \quad \text{ואת } u = x$$

$$u' = 1 \Rightarrow du = 1 dx \quad \text{עבשיו נגזור את } u \text{ נקבל}$$

$$V = \int dv = \int \sin x dx = -\cos x + c \quad \text{ועל } dv \text{ נבצע אינטגרל}$$

$$\int u dv = \int x \sin x dx \quad \text{האינטגרל המבוקש הוא} \quad \text{ואצלינו הוא}$$

$$= uv - \int vdu = \quad \text{ולפי נוסחת אינטגרציה בחלקים}$$

$$= x(-\cos x) - \int (-\cos x) 1 dx = \quad \text{נציב את } v \text{ ו- } dv \text{ ואת } u \text{ ו- } du \text{ ונקבל}$$

$$= -x \cos x - (-\sin x) + c = \sin x - x \cos x + c \quad \text{ומכאן}$$

זוהי האינטגרל המבוקש.

$$2. \quad \text{חשב את האינטגרל של } y = x e^x$$

$$\text{נבחר } u = x \quad \text{ואת } dv = e^x dx$$

$$\text{נגזור את } u \quad du = 1 \cdot dx$$

$$\text{ונבצע אינטגרל על } dv$$

$$v = \int e^x dx = e^x + c$$

$$\int u dv = uv - \int vdu \quad \text{נציב את הבחירה שלנו ונקבל}$$

$$\int x \cdot e^x dx = x e^x - \int e^x \cdot 1 dx = x e^x - e^x + c$$

גם את האינטגרל שאנו עושים על dv אפשר לפתור לפי נוסחת החלקים ואז אנו יכולים להמשיך ולבצע בשרשרת עד לפתרון המלא זה נקראת שיטת הרדוקציה.

אינטגרציה ע"י פירוק לגורמים

לעיתים יש לחשב אינטגרלים כאשר במכנה יש פולינום מדרגה כלשהיא, ואת המכנה ניתן לפרק לגורמים ולהביאו למכפלת איברים ממעלה ראשונה.

$$\frac{1}{ax^n + bx^{n-1} + \dots + kx + C} = \frac{A}{px + l} + \frac{B}{qx + i} + \dots + \frac{G}{sx + m}$$

אם נוכל למצוא את $A, B, \dots, G$ אזי נקבל לבצע אינטגרל על

$$\int \frac{A}{px+l} dx + \int \frac{B}{qx+i} dx + \dots + \int \frac{G}{sx+m} dx$$

וזו אינטגרל מידי מסוג $\ln x$ שאנו מכירים לדוגמא.

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x - 3} \quad 1. \text{ חשב את האינטגרל}$$

$$= \int \frac{dx}{(x+3)(x-1)} = \int \left(\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} \right) dx \quad \text{נפרק את המכנה לגורמים}$$

נחשב את A ואת B .

$$\frac{A(x-1) + B(x+3)}{(x+3)(x-1)}$$

וזו צריך להיות שווה למה שיש באינטגרל $\frac{1}{(x+3)(x-1)}$ לכן המונה חייב

להיות שווה ל-1 המקדם של X במונה הוא 0 והאיבר בחופשי הוא 1

$$A(x-1) + B(x+3) = 1 \quad \text{מכאן}$$

$$Ax - A + Bx + 3B = (A+B)x - (A-3B)$$

$$3B - A = 1 \quad \text{והאיבר החופשי} \quad A + B = 0 \quad (\text{המקדם של } X)$$

יש לנו 2 משוואות עם הנעלמים A ו- B .

$$\text{נפתור ונקבל} \quad A = -\frac{1}{4} \quad \text{ו} \quad B = \frac{1}{4} \quad \text{נציב זאת}$$

$$\int \frac{dx}{(x+3)(x-1)} = \int \left(\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} \right) dx =$$

את האינטגרל נכתוב

$$= -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+3} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{4} \ln(x+3) + \frac{1}{4} \ln(x-1) + C$$

$$\int \frac{2x-3}{x^3 + 4x^2 + x - 6} dx$$

2. חשב את

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1)(x+2)(x+3) \quad \text{כאן נפרק המכנה ל-3 גורמים}$$

$$\int \frac{2x-3}{x^3 + 4x^2 + x - 6} dx = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} \right) dx$$

נחשב את המונה של x^2 הוא 0 ושל x הוא 2 והאיבר החופשי -3

$$A(x+2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+2) =$$

$$Ax^2 + Bx^2 + Cx^2 + 5Ax + 2Bx + Cx + 6A - 3B - 2C =$$

$$(A+B+C)x^2 + (5A+2B+C)x + (6A-3B-2C)$$

ועכשיו נשווה מקדמים המקדם של x^2 הוא 0 ושל x הוא 2 והחופשי הוא -3.

$$6A - 3B - 2C = -3 \quad \text{ו} \quad 5A + 2B + C = 2 \quad \text{ו} \quad A + B + C = 0 \quad \text{ולכן}$$

יש לנו 3 משוואות עם הנעלמים C, B, A נחשב ונמצא כי

$$C = -\frac{27}{12} \quad \text{ו} \quad B = \frac{7}{3} \quad \text{ו} \quad A = -\frac{1}{12}$$

נציב זאת באינטגרל

$$\int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} \right) dx = -\frac{1}{12} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{7}{3} \int \frac{dx}{x+2} - \frac{27}{12} \int \frac{dx}{x+3} =$$

$$= -\frac{1}{12} \ln(x-1) + \frac{7}{3} \ln(x+2) - \frac{27}{12} \ln(x+3) + C$$

אינטגרלים טריגונומטריים

אינטגרלים מידיים או מכירים ויודעים מתוך הנגזרות

$y = \cot gx$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \cos x$	$y = \sin x$
$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$	$y' = -\sin x$	$y' = \cos x$

ולכן האינטגרלים יהיו $\int \sin x dx = -\cos x + c$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

נציב $u = \cos x$ ואז נגזור $du = -\sin x dx$

נציב זאת באינטגרל $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{du}{u}$

אנו יודעים את הנגזרת של $y = \ln x$ והנגזרת $y' = \frac{1}{x}$

לכן $\int \tan x dx = -\ln u + c = \ln |\cos x| + c$

אנו לוקחים את הערך המוחלט כי אין $\ln$ של מספר שלילי

ובאותו אופן $\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + c \quad \text{I} \quad \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2} x \right| + c$$

כמן כן אנו יכולים להשתמש בזהויות טריגונומטריות שמכירים כגון

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad 1.$$

לכן $\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + c$

$$\sin \alpha * \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) \} \quad 2. \text{ או לפי הזהות}$$

אם יש לנו לחשב $\int \sin 3x * \cos 5x dx = \frac{1}{2} \int \{ \sin(3x - 5x) + \sin(3x + 5x) \} dx =$

$$= \frac{1}{2} \int [\sin(-2x) + \sin(8x)] dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(8x) \right] + c$$

3. ידועה הזהות

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)$$

נחשב את

$$\int \sqrt{1 - \cos x} dx =$$

$$= \int \sqrt{2} \sin \left(\frac{x}{2} \right) dx = \sqrt{2} \left[-\frac{\cos \left(\frac{x}{2} \right)}{\frac{1}{2}} \right] + C = -2\sqrt{2} \cos \left(\frac{x}{2} \right) + C$$

בכל האינטגרלים יכולים להשתמש בשיטת ההצבה או אינטגרציה בחלקים.

4. חשב את

$$\int \sin x \cdot \sqrt[4]{\cos x - 2} dx =$$

נציב $u = \cos x - 2$ והגזירה היא $du = -\sin x dx$

$$= -\int du \cdot u^{\frac{1}{4}} = -\frac{u^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + C = -\frac{4}{5} \sqrt[4]{(\cos x - 2)^5} + C$$

נציב באינטגרל

הצבות טריגונומטריות

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \quad \text{אנו מכירים את הזהויות:}$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x$$

$$\sqrt{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x \quad \text{ולכן גם}$$

$$\sqrt{1 + \cot^2 x} = \frac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec} x$$

אם יש לנו לבצע אינטגרל על פונקציות מהסוגים הבאים:

$$1) \sqrt{a^2 - b^2 x^2} = a \sqrt{1 - \left\{ \frac{b}{a} x \right\}^2}$$

$$2) \sqrt{a^2 + b^2 x^2} = a \sqrt{1 + \left\{ \frac{b}{a} x \right\}^2}$$

$$3) \sqrt{b^2 x^2 - a^2} = a \sqrt{\left\{ \frac{b}{a} x \right\}^2 - 1}$$

נחלק את הביטוי שבתוך השורש ב a^2 כך שנקבל בשורש $1 \pm \{ \}$

$$x = \frac{a}{b} \sin u \quad \text{ב-1} \quad \text{ואז נציב את}$$

$$x = \frac{a}{b} \tan u \quad \text{ב-2}$$

$$x = \frac{a}{b} \sec u \quad \text{וב-3}$$

ואז נגזור את $\frac{dx}{du}$ וכאשר נציב את x ואת dx באינטגרל נקבל פונקציה

טריגונומטרית שתהיה קלה יותר לפתור. לדוגמא:

$$1. \text{ חשב את } \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{9-x^2}} =$$

נציב. זה מסוג (1) לכן $x = 3 \sin u$ והגזירה היא $dx = 3 \cos u \cdot du$

$$= \int \frac{3 \cos u du}{9 \sin^2 u \sqrt{9-9 \sin^2 u}} = \int \frac{3 \cos u du}{9 \sin^2 u \cdot 3 \sqrt{1-\sin^2 u}} =$$

נציב באינטגרל

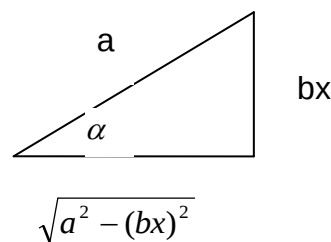
$$= \int \frac{du}{9 \sin^2 u} = -\frac{1}{9} \cot u$$

לאחר צמצומים נקבל (ראה עמוד 13)

$$\frac{b}{a} x = \sin u$$

נסתכל על ההצבה שעשינו

זה מתאים למשולש ישר זווית



איור 7

בביטוי שלנו יש $\sqrt{9-x^2}$ זה מתאים אצלינו למשולש שבו

$$a=3 \quad b=1 \quad \alpha=u$$

ובמשולש הזה

$$\cot u = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

נציב זאת

$$= -\frac{1}{9} \cot u + C = -\frac{1}{9} \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + C$$

ולכן האינטגרל שקבלנו הוא

2. חשב $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+13}}$ את המכנה נוכל לכתוב

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+13}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+9}} =$$

נכפיל ונחלק ב 9 ונקבל

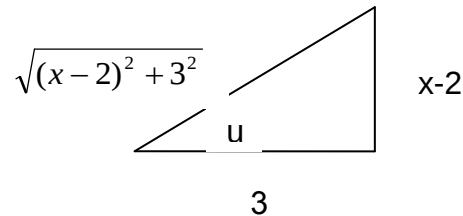
$$\int \frac{dx}{3 \sqrt{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1}}$$

זה מסוג (2) לכן נציב $\frac{x-2}{3} = \tan u$ נגזור

$$dx = \frac{3}{\cos^2 u} du \quad \text{כמו כן ידוע} \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\int \frac{3du}{\frac{\cos^2 u}{1/\cos u}} = \int \frac{1}{\cos u} du = \ln \left| \frac{1}{\cos u} + \tan u \right| + C \quad \text{נציב באינטגרל}$$

ההצבה שלנו היא $\frac{x-2}{3} = \tan u$ לכן במשולש ישר הזווית יראה



ומכאן נקבל את $\cos u = \frac{3}{\sqrt{(x-2)^2 + 9}}$ ונציב

$$\ln \left| \frac{1}{\cos u} + \tan u \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{(x-2)^2 + 9} + (x-2)}{3} \right| + c =$$

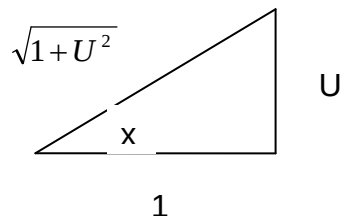
את ה-3 שבמכנה ניקח כ- $\ln 3$ – זה קבוע ונכלול אותו בתוך c.

$$= \ln \left| \sqrt{(x-2)^2 + 9} + (x-2) \right| + C$$

בשיטת ההצבה הטריגונומטרית כאשר מציבים $u = \tan x$ או יכולים לדעת את ה- $\cos x$ ואת ה- $\sin x$ וה- $\cot x$ בעזרת המשולש:

אנו נוכל לכתוב זאת $\tan x = \frac{u}{1}$ ואז

המשולש יראה



איור 8

ומכאן נוכל לקבל

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+U^2}} \quad - \quad \sin x = \frac{U}{\sqrt{1+U^2}}$$

מציאת קבוע האינטגרל C

אנו ראינו את האינטגרל $\int y' dx = f(x) + C$. פתרון האינטגרל נותן לנו את הפונקציה הקדומה ותוספת ה C נותן לנו משפחה של פונקציות קדומות. אם נדע נקודה אחת בה עוברת הפונקציה נוכל להציב את ערכי הנקודה (X, Y) ואז לקבל את C קבוע האינטגרציה. ה C הוא בעצם נקודת המפגש של הפונקציה (הקדומה) עם ציר ה Y. לדוגמא

1. מצא את האינטגרל של הפונקציה $y = 6x - 8$. פונקציה זו היא נגזרת של פונקציה אחרת (קדומה) $Y = 3x^2 - 8x + C$ ואכן אם נבצע $\int$ נקבל

$$\int (6x - 8) dx = \frac{6x^2}{2} - 8x + C$$

אם אנו יודעים כי הפונקציה (הקדומה) עוברת בנקודה $(1; -1)$ נציב אותה

$$Y = \frac{6x^2}{2} - 8x + C = \frac{6 \cdot 1^2}{2} - 8 \cdot 1 + C = -1$$

ומכאן נקבל את $C = 4$.

צייר את גרף הפונקציה (הקדומה) ותקבל פרבולה החותכת את ציר ה Y בנקודה $(0, 4)$.

2. גרף של פונקציה עובר בנקודה $P(1; -2)$ ונתון כי שיפוע העקומה בנקודה זו הוא 3 ו הנגזרת השניה היא $y'' = 12x - 10$ מצא את משוואת הפונקציה Y.

ראשית נבצע אינטגרל על y'' ונקבל את y' $y' = \int (12x - 10) dx = 6x^2 - 10x + c$

בנקודה P ה $x = 1$ והוא אותו x כמו בנגזרת לכן נציב $6 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 + c = 3$

מכאן נקבל את $c = 3 + 4 = 7$ עכשיו נבצע אינטגרל נוסף (על y')

פונקצית הנגזרת הראשונה לאחר שמצאנו את c תהיה

$$y' = 6x^2 - 10x + 7$$

$$\int (6x^2 - 10x + 7) dx = \frac{6x^3}{3} - \frac{10x^2}{2} + 7x + C = 2x^3 - 5x^2 + 7x + C$$

וזו הפונקציה Y המבוקשת. הנקודה P נמצאת על הפונקציה לכן נציב אותה

$$y = -2 \quad | \quad x = 1$$

$$2 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 + C = -2$$

$$C = -6$$

ומכאן נקבל את

$$Y = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 6$$

והפונקציה המבוקשת תהיה

אינטגרל של פונקציה מעריכית ופונקציה לוגריתמית

אנו יודעים כי האינטגרל היא פעולה מנוגדת לנגזרת. לכן נוכל למצוא אינטגרל בעזרת ידיעתנו את הנגזרת.

נתונה פונקציה מעריכית $y = a^x$ כאן $f(x) = x$ את הנגזרת ראינו $y' = a^x * \ln a$ באופן כללי אם $y = a^{f(x)}$ הנגזרת תהיה $y' = f'(x) * a^{f(x)} * \ln a$

כלומר אם נגזור פונקציה $y = \frac{a^x}{\ln a}$ נקבל את $y' = a^x$ ולכן האינטגרל

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$$

$$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{1}{\ln a} a^{f(x)} + C \quad \text{ובאופן כללי}$$

לדוגמא

$$\int 5^x dx = \quad 1. \text{ חשב את}$$

$$\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + c$$

$$\int 8^{\frac{(2x+3)}{3}} dx = \quad 2. \text{ חשב}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{3} \quad \text{ונגזור} \quad u = \frac{2x+3}{3} \quad \text{נשתמש בשיטת ההצבה ונציב}$$

$$\int 8^{\frac{(2x+3)}{3}} dx = \int 8^u \frac{3}{2} du = \frac{3}{2} * \frac{8^u}{\ln 8} + C$$

$$= \frac{3}{2} * \frac{8^{\frac{2x+3}{3}}}{\ln 8} + C = \frac{3}{2} * \frac{2^{2x} * 8}{\ln 8} + C = \frac{4^{x+1}}{\ln 2} + C \quad \text{נשיב חזרה את ההצבה}$$

וכך גם לגבי פונקציות לוגריתמיות. נמצא מתוך הנגזרות

$$y' = \frac{1}{x \ln a} \quad \text{הנגזרת} \quad y = \log_a x \quad \text{אם יש פונקציה}$$

$$y' = \frac{1}{f(x) \ln a} f'(x) \quad \text{הנגזרת} \quad y = \log_a f(x) \quad \text{ובאופן כללי}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c \quad \text{ומכאן נלמד על האינטגרל}$$

$$y = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{האינטגרל יהיה} \quad \text{ואם נתונה פונקציה מהסוג}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln[f(x)] + c$$

הערה: מאחר ו $\ln x$ מוגדר רק בתחום $x > 0$ ואילו $\frac{1}{f(x)}$ מוגדר לכל x

פרט ל $f(x) = 0$. לכן אנו לוקחים את הערך המוחלט.

$$\ln|f(x)| + c = \ln[f(x)] + c \quad \text{ונכתוב}$$

לדוגמא חשב את $\int \frac{4x+3}{2x^2+3x-4} dx$

אנו רואים כי המונה הוא הנגזרת של המכנה.

נשתמש בשיטת ההצבה $u = 2x^2 + 3x - 4$ ונגזור $\frac{du}{dx} = 4x + 3$

נציב באינטגרל ונצמצם $\int \frac{4x+3}{2x^2+3x-4} dx = \int \frac{4x+3}{u} * \frac{du}{4x+3} = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c$
נחזיר את ההצבה $= \ln|2x^2 + 3x - 4| + c$

ולגבי לוגריתמים טבעיים (כמו ברגילים) $y = \ln x$ והנגזרת $y' = \frac{1}{x}$

ובאופן כללי $y = \ln f(x)$ הנגזרת $y' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$

ואז האינטגרל $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

ולגבי אינטגרל של פונקציות טריגונומטריות שהפונקציה הקדומה היא $\ln$

האינטגרל של $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c$ ושל $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln |\sec x + \tan x| + c$

וכך גם לגבי $y = e^x$ והנגזרת $y' = e^x$
באופן כללי $y = e^{f(x)}$ הנגזרת $y' = f'(x) * e^{f(x)}$

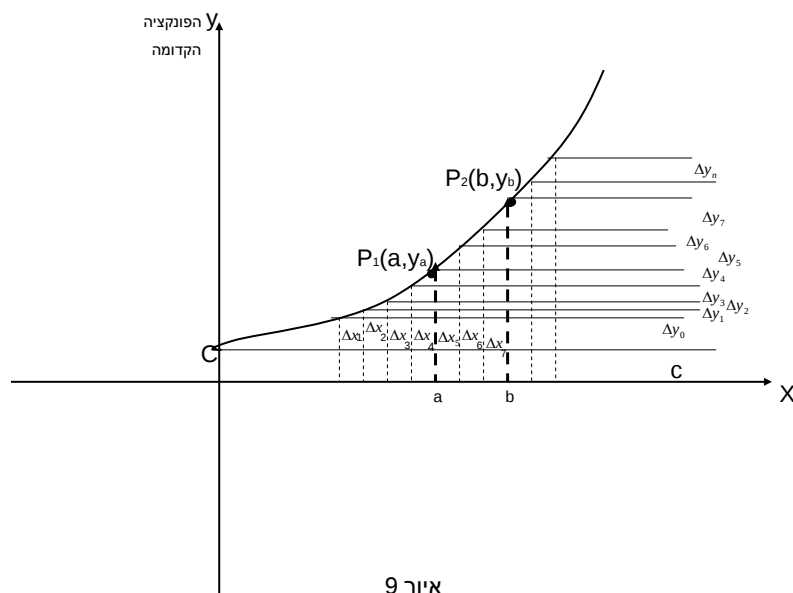
והאינטגרל יהיה $\int e^x dx = e^x + c$
 $\int e^{f(x)} * f'(x) dx = e^{f(x)} + c$

לדוגמא חשב את $\int (e^{4x} + 3e^{-5x}) dx$

$\int (e^{4x} + 3e^{-5x}) dx = \int e^{4x} dx + 3 \int e^{-5x} dx =$
 $= \frac{1}{4} e^{4x} - \frac{3}{5} e^{-5x} + c$

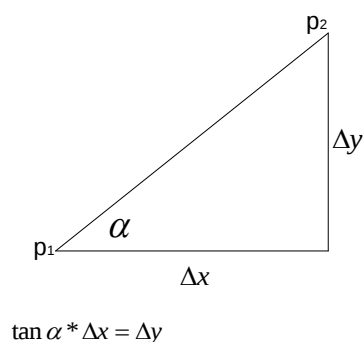
האינטגרל המסוים

אנו ראינו (ראה עמודים 5 עד 7) כי אם יש לנו פונקציה $y = f(x)$ ערך הפונקציה בנקודה $x = a$ הוא סכום כל ה- Δy ים מ $x = 0$ עד $x = a$ $+ C$.



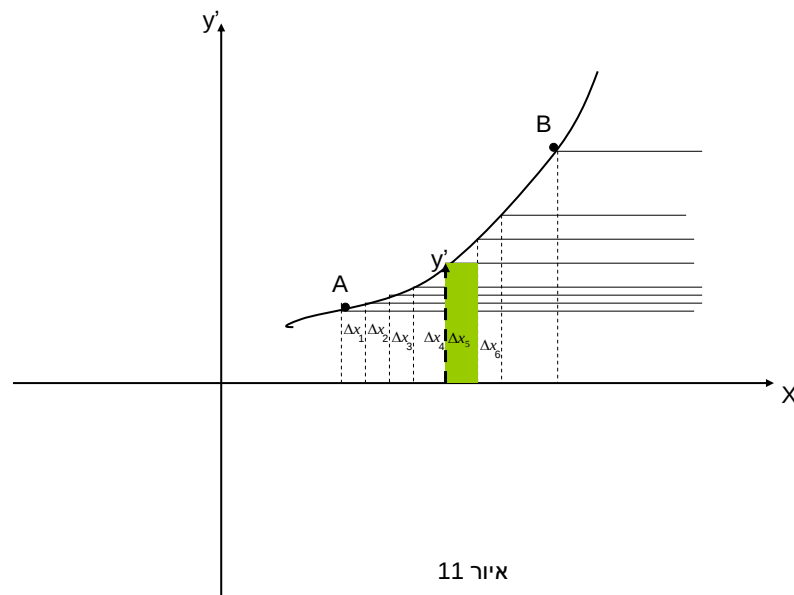
איור 9

וכך גם לגבי ערך הפונקציה בנקודה $x = b$ סכום כל ה- Δy ים מ $x = 0$ עד ל $x = b$ אם ניקח את ה- Δx מספיק קטן נקבל (בקירוב טוב) משולש ישר זווית (אשר בהגדלה יראה)



איור 10

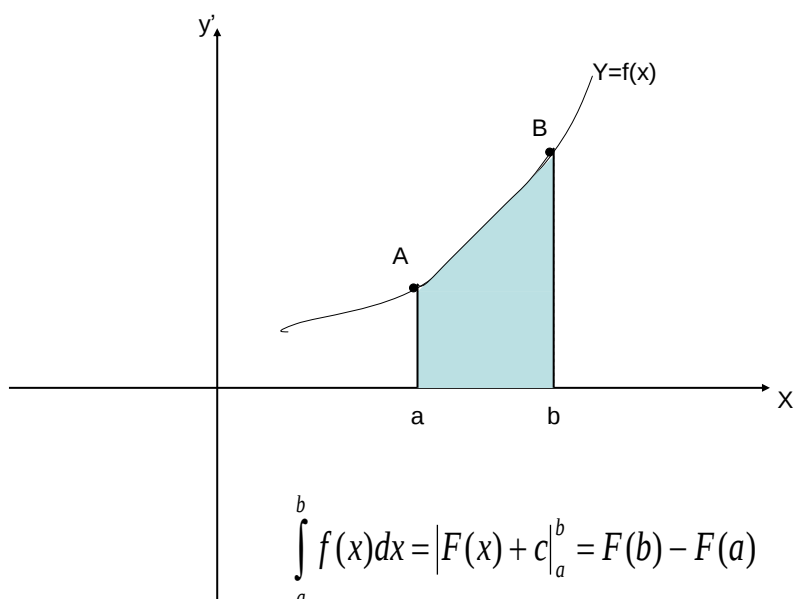
הזווית α נותנת לנו את השיפוע של המשיק בנקודה a שזה הנגזרת בנק' $x = a$ נסתכל עכשיו על גרף הנגזרת $y = f'(x)$ זו גם פונקציה של x .



ה $\tan \alpha * \Delta x$ הוא השטח המוצלל. אנו רואים כי השטח בגרף הנגזרת הוא Δy בפונקציה הקדומה. כמו כן ראינו כי סכום ה Δy נותן לנו את ערך הפונקציה הקדומה y בנקודה. כלומר פעולת האינטגרל נותנת לנו את הפונקציה הקדומה שהיא **סכום** כל השטחים המלבניים $\tan \alpha * \Delta x$ מ $x=0$ ועד לנקודה x_i . כאשר ה $\Delta x \rightarrow 0$ אנו מקבלים מלבנים מוצללים צרים מאד ואז ניתן לאמר כי קטעי הגרף (שהם היתר במשולש ישר הזווית) הם קווים ישרים (בקירוב טוב). אם הנקודה היא $x=a$ זה יתן את השטח "מתחת לעקומה" מ $x=0$ עד $x=a$ ואם הנקודה היא $x=b$ נקבל את השטח "מתחת לעקומה" מ $x=0$ עד $x=b$. כך שאם נפחית שטח אחד מהשני נקבל את השטח בין הנקודות a ו b . וזה האינטגרל המסוים הנותן לנו שטח מתחת לעקומה בין הנקודות.

$$\int_a^b f(x)dx = \left| F(x) + c \right|_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{ומסמנים אותו}$$

וזה האינטגרל המסוים אשר מוגבל בין $x=a$ לבין $x=b$. וקבוע האינטגרל C מתבטל עקב פעולת ההפחתה. אנו רואים כי אנו יכולים לחשב שטח שמ"תחת לעקומה" ע"י פעולת אינטגרל על פונקציה – אם נסתכל על הפונקציה כאילו היא פונקצית נגזרת. בעמוד 7 ראינו כי כאשר y' שלילי מקבלים שטחי מלבנים שליליים והאינטגרל יתן תוצאה שלילית. זה אומר כי הפונקציה נמצאת מתחת לציר ה X (שם Y שלילי). מאחר ואנו מחשבים שטח שהוא תמיד חיובי, יש לשים לב באם הפונקציה חותכת את ציר X ($Y=0$) בתוך גבולות האינטגרל a ו b ואז יש לחשב את השטחים, בחלקים השליליים, בנפרד ולהוסיפם מבלי להתחשב בסימנם.



איור 12

לפעולת האינטגרל מספר תכונות נראה חלק מהן

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
3. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
4. $\int_a^b Kf(x)dx = K \int_a^b f(x)dx$
5. $\int_a^b [u(x) + v(x)]dx = \int_a^b u(x)dx + \int_a^b v(x)dx$
6. $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

אם קיימת נקודה c בין a ו b אז

דוגמאות

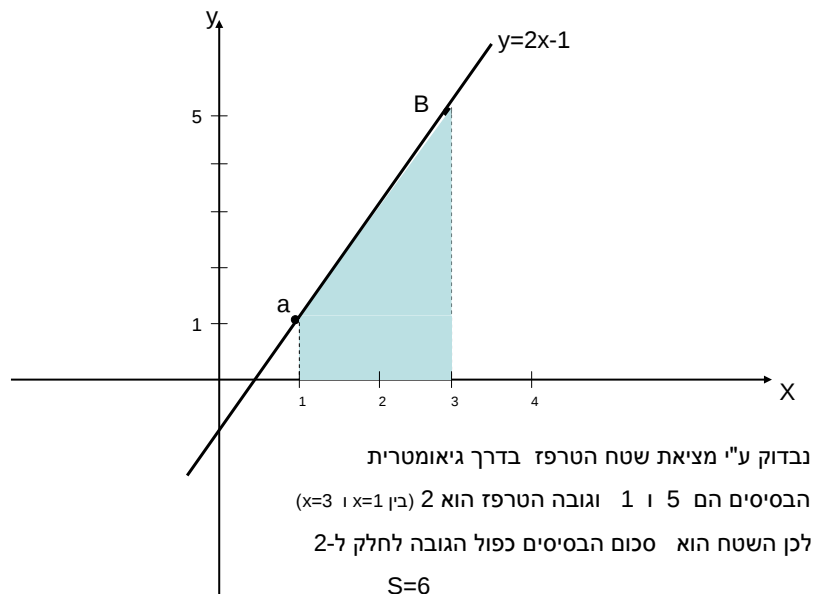
1. חשב את השטח מתחת לעקומה $y = 2x - 1$ בין $x = 1$ עד $x = 3$

נבצע אינטגרל

$$\int_1^3 (2x - 1)dx = \left| x^2 - x \right|_1^3 = (9 - 3) - (1 - 1) = 6$$

כלומר שטח העקומה מתחת לקו הישר הוא 6 יחידות שטח.

נבדוק זאת בעזרת ציור הגרף



איור 13

בדיוק כפי שקבלנו .

חשב עכשיו את השטח מתחת לעקומה בין $x=0$ ל $x=3$

$$\int_0^3 (2x-1)dx = \left\{x^2 - x\right\}_0^3 = (9-3) - (0-0) = 6$$

הסבר כיצד קבלנו אותו שטח אף על פי שהגדלנו את הגבול?

הסתכל על הגרף מ $x=0$ עד $x=\frac{1}{2}$ מתקבל משולש שהוא מתחת לציר Xואילו השטח המוגבל מ $x=\frac{1}{2}$ עד $x=1$ הוא אותו גודל של משולש מעל לציר X**שטח מתחת לציר X הוא שלילי ומעל לציר X הוא חיובי**כך שהם **מקזזים** זה את זה ומקבלים אותו גודל של שטח. ראה איור 132. חשב את השטח של העקומה $y = \frac{x+3}{x+2}$ בגבולות $x=2$ עד $x=4$

נבדוק ונראה כי הפונקציה אינה חותכת את ציר ה X בין הגבולות.

$$y = \frac{x+3}{x+2} = \frac{x+2+1}{x+2} = \frac{x+2}{x+2} + \frac{1}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}$$

את הפונקציה נוכל לפשט

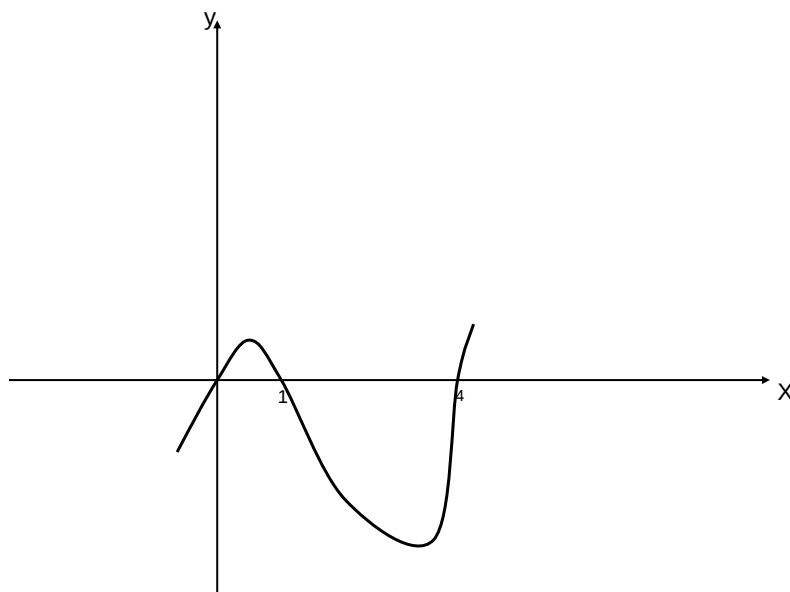
נבצע עכשיו אינטגרל

$$\int_2^4 \frac{x+3}{x+2} dx = \int_2^4 \left(1 + \frac{1}{x+2}\right) dx = [x + \ln|x+2|]_2^4 = [4 + \ln 6 - 2 - \ln 4] = 2 + \ln \frac{6}{4}$$

3. חשב שטח הפונקציה $y = \ln x$ בגבולות $x=1$ עד $x=e$

$$\int_1^e \ln x * dx = [x \ln x - x]_1^e = [(e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1)] = +1$$

4. חשב את שטח הפונקציה $y = x^3 - 5x^2 + 4x$ בגבולות $x = 0$ ו- $x = 4$ נצייר את גרף הפונקציה



איור 14

כאן אנו רואים כי הפונקציה חותכת את ציר ה- X בנק' $x = 0$, $x = 1$ ו- $x = 4$ לכן אם נחשב ישירות בין הגבולות 0 ו-4 חלק מהשטח יקוזז. נבדוק

$$\int_0^4 (x^3 - 5x^2 + 4x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 5\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \left(\frac{256}{4} - 5\frac{64}{3} + 4\frac{16}{2} \right) = -10.66$$

קיבלנו שלילי כפי שציפינו והשטח שקבלנו הוא $S = 10.66$ נראה עכשיו את החישוב הנכון. נחלק לשתי קבוצות

$$\int_1^4 (x^3 - 5x^2 + 4x) dx \quad \text{השנייה} \quad \int_0^1 (x^3 - 5x^2 + 4x) dx \quad \text{האחת}$$

$$\int_1^4 (x^3 - 5x^2 + 4x) dx = -11.24 \quad \text{ו} \quad \int_0^1 (x^3 - 5x^2 + 4x) dx = 0.58 \quad \text{נחשב}$$

$$S = 11.24 + 0.58 = 11.82 \quad \text{והשטח הנכון יהיה}$$

לפעמים אין באפשרותינו למצוא את האינטגרל באופן ישיר אלא בשיטת ההצבה. כלומר אנו מחליפים את המשתנה X במשתנה U . לכן יש להחליף את גבולות האינטגרל בהתאם. לדוגמא

1. חשב את השטח של הפונקציה $y = \frac{8x^2}{(x^3 + 2)^3}$ בגבולות $x = 0$ ו- $x = 1$

$$\int_0^1 \frac{8x^2}{(x^3 + 2)^3} dx$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 \quad \text{נגזור} \quad u = x^3 + 2 \quad \text{נעשה הצבה}$$

$$8x^2 dx = \frac{8}{3} du \quad \text{ונקבל} \quad \frac{8}{3} \quad \text{נכפיל ב}$$

$$\int_0^1 \frac{8x^2}{(x^3 + 2)^3} dx = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\frac{8}{3} du}{u^3}$$

נחשב את הגבולות של u .

$$u = x^3 + 2 \quad \text{ההצבה היתה} \quad \text{גבולות ה } X \text{ הם } 0 \text{ ו- } 1$$

$$u = 0^3 + 2 = 2 \quad x = 0 \quad \text{כאשר} \quad \text{נציב את גבולות ה } X \text{ ונקבל}$$

$$u = 1^3 + 2 = 3 \quad x = 1 \quad \text{וכאשר} \quad \text{ואלו הגבולות}$$

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{\frac{8}{3} du}{u^3} = \int_2^3 \frac{\frac{8}{3} du}{u^3} = \frac{8}{3} \left| -\frac{1}{2u^2} \right|_2^3 = -\frac{8}{6} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4} \right) = 0.185$$

$$y = \frac{1}{x^2 \sqrt{9 - x^2}} \quad \text{2. חשב את השטח מתחת לעקומת הפונקציה}$$

$$\text{בין הגבולות } x=1 \text{ ו- } x=2 \quad (\text{ראה בעמוד 14})$$

$$dx = 3 \cos u * du \quad \text{נגזור} \quad x^2 = 9 \sin^2 u \quad \text{ובריבוע} \quad x = 3 \sin u \quad \text{נעשה הצבה}$$

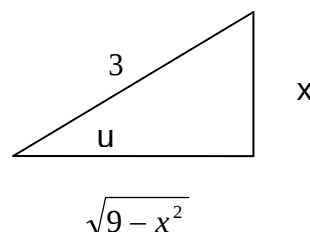
$$u = \arcsin \frac{1}{3} = \frac{\pi}{9} \quad \text{ומכאן} \quad \sin u = \frac{1}{3} \quad x = 1 \quad \text{כאשר}$$

$$u = \frac{7\pi}{30} \quad \text{וכאשר} \quad \sin u = \frac{2}{3} \quad x = 2$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2 \sqrt{9 - x^2}} = \int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{7\pi}{30}} \frac{3 \cos u * du}{9 \sin^2 u * 3 \sqrt{1 - \sin^2 u}} = \int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{7\pi}{30}} \frac{du}{9 \sin^2 u} = \text{נציב באינטגרל}$$

$$= \left| -\frac{1}{9} \cot u \right|_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{7\pi}{30}} = -\frac{1}{9} (1.11 - 2.747) = 0.18$$

נבדוק זאת ע"י שנציב בחזרה. $x = 3 \sin u$ $\cot u$ לכן



המשולש ייראה

ומכאן נוכל לקבל

$$\cot u = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} \quad \text{ו-}$$

איור 15

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2 \sqrt{9-x^2}} = \left| -\frac{1}{9} \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} \right|_1^2 = 0.18 \quad \text{נציב זאת ונקבל}$$

$$3. \text{ מצא} \quad \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{4-x^2} \quad \text{נכתוב זאת}$$

$$\int_{-1}^1 x^2 \sqrt{4-x^2} dx = \int_{-1}^1 x^2 2 \sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} dx$$

$$dx = 2 \cos u du \quad \text{נעשה הצבה} \quad \frac{x}{2} = \sin u \quad \text{או} \quad x = 2 \sin u \quad \text{נגזור}$$

$$x^2 = 4 \sin^2 u \quad |$$

$$u = \arcsin -\frac{1}{2} = -30^\circ \quad | \quad -1 = 2 \sin u \quad \text{נקבל} \quad x = -1 \quad \text{כאשר}$$

$$u = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \quad | \quad 1 = 2 \sin u \quad \text{נקבל} \quad x = 1 \quad \text{וכאשר} \quad u = -\frac{\pi}{6}$$

$$\sqrt{1-\sin^2 u} = \cos u \quad \text{ידוע כי}$$

$$\int_{-1}^1 x^2 2 \sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 4 \sin^2 u * 2 \cos u * 2 \cos u du = \quad \text{נציב}$$

$$= \int 16 \sin^2 u \cos^2 u = 4 \int (2 \sin u * \cos u)^2 = 4 \int \sin^2(2u) =$$

$$\text{ידועה הזהות} \quad \sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u) \quad \text{לכן}$$

$$= 4 \int \sin^2(2u) dx = 4 \int \frac{1}{2}(1 - \cos 4u) du = 2 \int (1 - \cos 4u) du$$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 4u) du = 2 \left| u - \frac{1}{4} \sin(4u) \right|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

שטח המוגבל בין שתי פונקציות

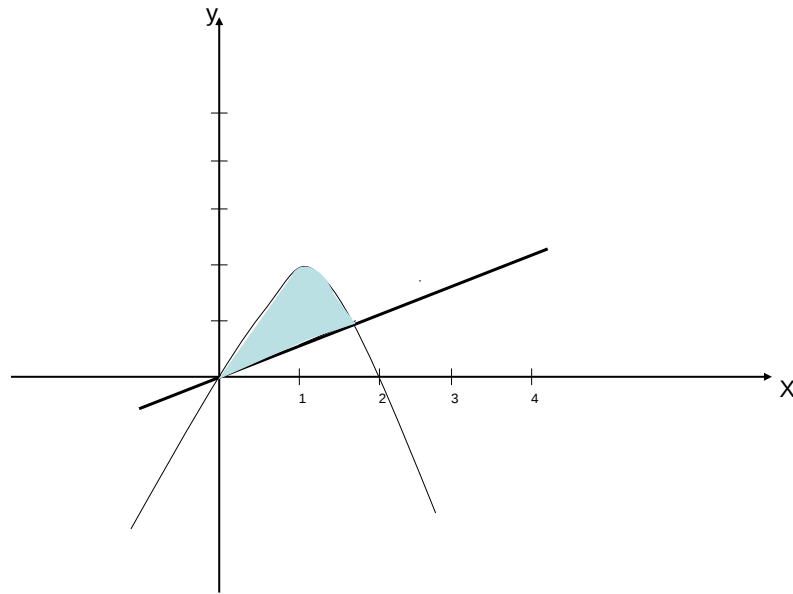
בעזרת פעולת האינטגרל אנו יכולים לחשב שטחים מישוריים המוגבלים בין פונקציות נראה מספר דוגמאות

$$f(x) = -2x^2 + 4x \quad \text{1. נתונות שתי פונקציות}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x$$

חשב את השטח המוגבל בין הפונקציות.

ראשית נצייר את הגרפים המתאימים



איור 16

אנו רואים מהגרף כי אין שטחים שליליים. ומאחר ואנו מבינים את פעולת האינטגרל הרי שהפתרון יהיה השטח העליון בין שתי נקודות החיתוך של הפונקציות (גבולות האינטגרל) פחות השטח התחתון בגבולות אלו. הערה: גם אם הישר יעבור מתחת לציר x זה y_2 יהיה שלילי ההפחתה $y_1 - y_2$ תיתן לנו תוצאת +. כלומר השטחים יתווספו.

ראשית נמצא את נקודות החיתוך של שתי הפונקציות

$$\frac{1}{2}x = -2x^2 + 4x$$

אלו יהיו גבולות האינטגרלים. $x_2 = \frac{7}{4}$ ו $x_1 = 0$

$$\int_0^{\frac{7}{4}} [f(x) - g(x)] dx$$

את השטח המוגבל ע"י הפונקציות נחשב

$$\int_0^{\frac{7}{4}} [(-2x^2 + 4x) - \frac{1}{2}x] dx =$$

$$\left| \frac{-2x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} \right|_0^{\frac{7}{4}} = \left| \frac{-2x^3}{3} + \frac{7}{4}x^2 \right|_0^{\frac{7}{4}} = \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{7}{4} \right)^3 + \frac{7}{4} \left(\frac{7}{4} \right)^2 \right] = 1.786$$

$$y_1 = x^2 - 2x$$

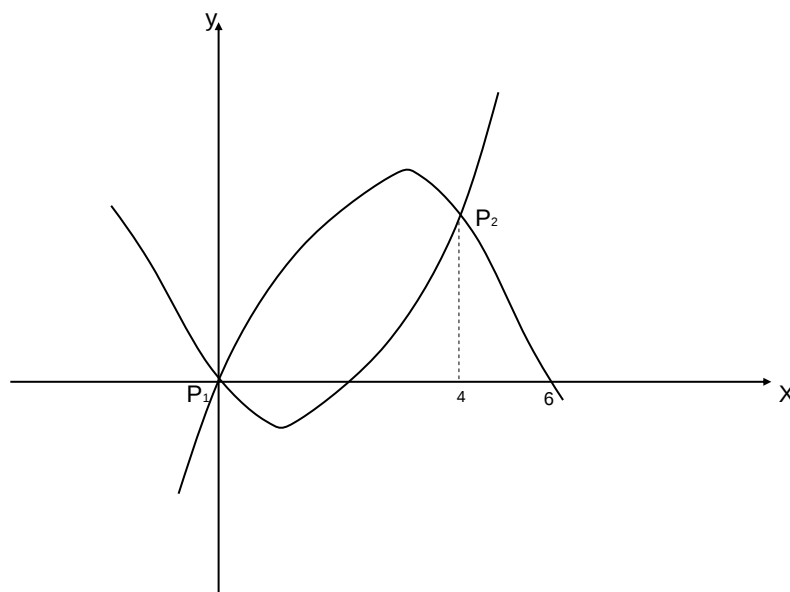
$$y_2 = 6x - x^2$$

2. מצא את השטח המוגבל בין הפונקציות

ראשית נמצא את נקודות החיתוך בין הפונקציות
מכאן נקבל $2x^2 - 8x = 0$ ואז $x_1 = 0$ ו $x_2 = 4$ אלו הגבולות

נבצע אינטגרל על $y_2 - y_1$

נראה את הגרף

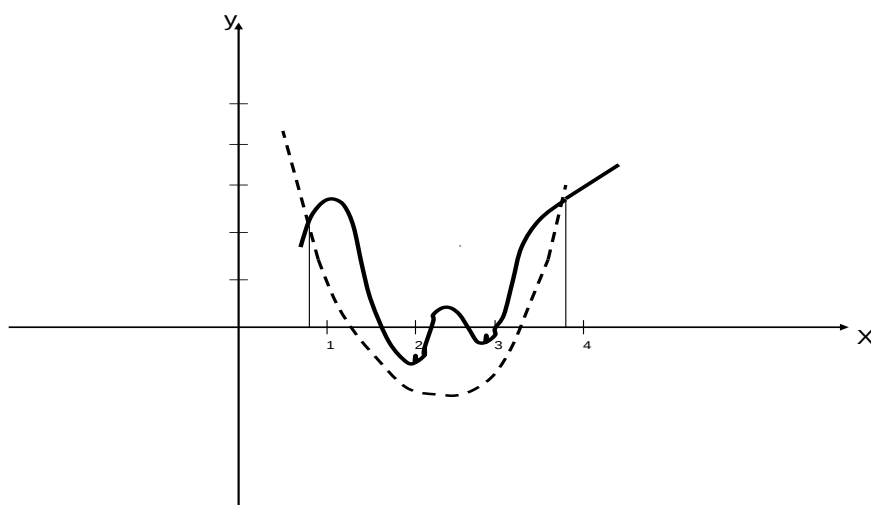


איור 17

$$\int_0^4 [(6x - x^2) - (x^2 - 2x)] dx = \int_0^4 (-2x^2 + 8x) dx = -2 \int_0^4 (x^2 - 4x) dx =$$

$$-2 \left[\frac{x^3}{3} - 4 \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = -2 \left(\frac{64}{3} - 4 \frac{16}{2} \right) = 21 \frac{1}{3}$$

אם היינו עושים אינטגרל על $y_1 - y_2$ היינו מקבלים שטח שלילי. לפעמים ישנן פונקציות שאינן יכול לדעת באם ישנן שטחים שמתחת לציר (X שלילי ראה איור 18), או שנחתכים במספר נקודות ואז קשה לדעת מהו השטח שהינך מקבל כתוצאה מהאינטגרל, לכן רצוי לבדוק את נקודות החיתוך של הפונקציות עם ציר ה X ($y=0$) ולבצע אינטגרל לכל חלק בנפרד בין הגבולות של חיתוך עם ציר ה X

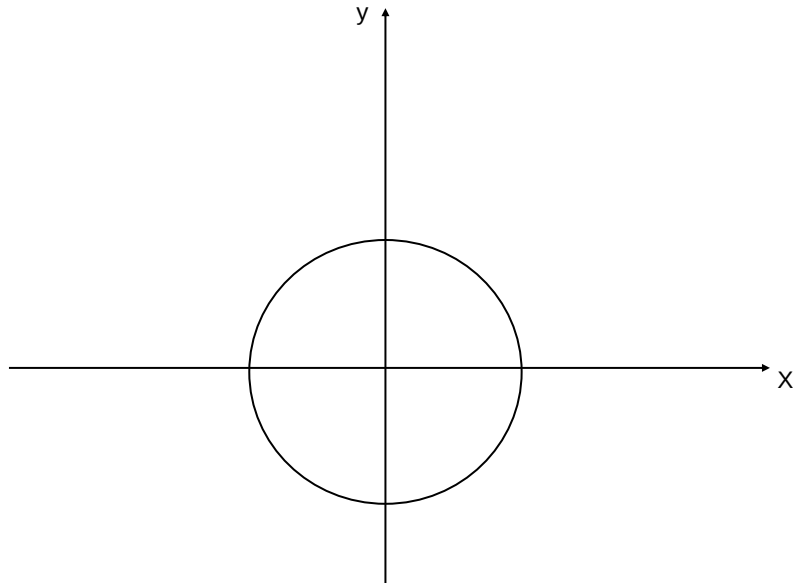


איור 18

בהמשך נראה שיטה אחרת כיצד לחשב את השטח.

תרגיל: בצע אינטגרל נפרד לכל חלק על דוגמא 2 עמ' 28 וראה כי התוצאות זהות.

לפעמים יש לנו פונקציות סימטריות ואז אפשר לבצע אינטגרל על חלק אחד מצד הסימטריה ולהכפילו על מנת לקבל את כולו למשל מעגל. פונקצית המעגל היא $x^2 + y^2 = R^2$ נקח מעגל ברדיוס 5 ונחשב את שטחו.



איור 19

פונקצית המעגל היא $y = \sqrt{25 - x^2}$ עקב הסימטריה אנו נחשב רבע מעגל בגבולות $x_1 = 0$ ו $x_2 = 5$

$$\int_0^5 \sqrt{25 - x^2} dx$$

נעשה הצבה $\frac{x}{5} = \sin u$ או $x = 5 \sin u$ והנגזרת $dx = 5 \cos u * du$

הגבולות החדשים לפי ההצבה יהיו כאשר $x = 0$ $u = 0$ וכאשר $x = 5$ $u = \frac{\pi}{2}$

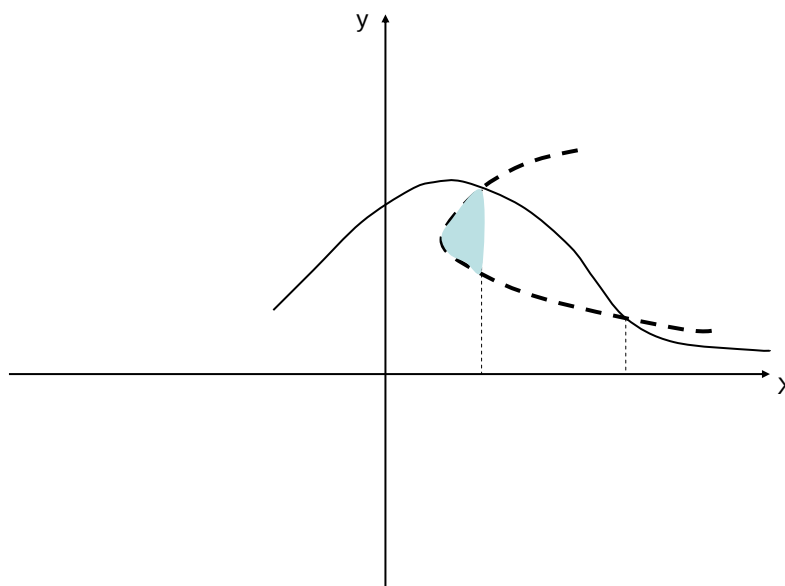
$$\int_0^5 \sqrt{25 - x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5 \sqrt{1 - \sin^2 u} * 5 \cos u * du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 25 \cos^2 u * du \quad \text{נציב}$$

ידועה הזהות $\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$ נציב ונקבל

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 25 \cos^2 u * du = 25 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + \cos 2u) du = \frac{25}{2} \left| u + \sin 2u \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{25\pi}{4}$$

זה שטח של רבע מעגל לכן שטח המעגל הוא פי 4 $25\pi = \pi 5^2 = \pi R^2$

כאשר הגבולות הן נקודות חיתוך בין הפונקציות יש לשים לב להפרש
 כי לפעמים ההפרש $y_1 - y_2$ (ראה איור 20) לא מכסה את כל השטח



איור 20

כאן השטח המוצלל אינו מכוסה ע"י האינטגרל ולכן יש לשים לב!!
 אם נסתכל על דוגמא המעגל, אנו לקחנו גבולות מ $x=0$ עד $x=5$
 אבל בגבולות אלו רבע המעגל עובר מעל לציר ה X ורבע מעגל מתחת לציר X
 כיצד נדע לבחור ביניהם? ל $y = \sqrt{25 - x^2}$ יש שתי פתרונות $+$ ו $-$ הפתרון
 החיובי הוא מעל הציר והשלילי מתחת לציר. גם לאחר ההצבה שעשינו וקבלנו

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 5\sqrt{1 - \sin^2 u} * 5 \cos u * du \quad \text{השורש הוא } \pm \cos u \quad \text{ואנו עשינו על הפתרון}$$

החיובי, אם היינו לוקחים את השלילי הגבולות היו בין $\frac{\pi}{2}$ ו π .

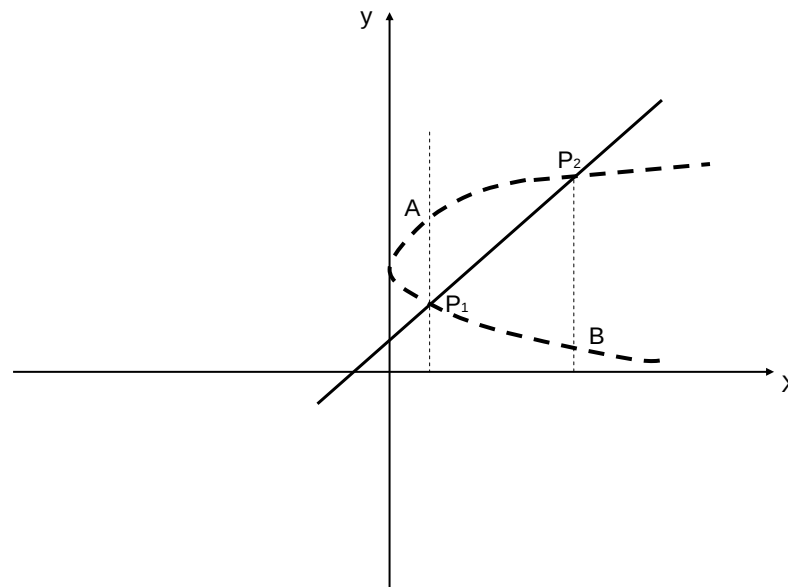
נראה דוגמא

$$y_1 = \sqrt{x} + 3$$

$$y_2 = x + 1$$

מהו השטח המוגבל על ידי שתי הפונקציות

נראה את הגרפים



איור 21

נחשב את נקודות החיתוך

$$y_1 = \sqrt{x} + 3$$

$$y_2 = x + 1$$

$$y_1 - 3 = \sqrt{x}$$

$$(y_1 - 3)^2 = x$$

$$(y - 3)^2 = y - 1$$

בנקודות החיתוך

$$y^2 - 6y + 9 = y - 1$$

נקבל משוואה ריבועית

$$x_2 = 4 \quad | \quad x_1 = 1 \quad \text{ובהתאם} \quad y_2 = 5 \quad | \quad y_1 = 2$$

$$P_2(4;5) \quad | \quad P_1(1;2)$$

נקודות החיתוך הן

שים לב לגרף (איור 21) יש שטח שאינו מכוסה בדיוק כמו באיור 20, ולכן השטח של הפונקציה y_1 אינה מחושבת בין הגבולות $x=1$ ו $x=0$

כך שאם נבצע $\int_1^4 (\sqrt{x} + 3) dx$ לא נקבל את השטח האמיתי.

הסתכל על איור 21 בגבול $x=1$ הפרבולה נחתכת בשתי נקודות A ו P_1

וב $x=4$ הפרבולה נחתכת בנקודות P_2 ו B .

כפי שראינו אם ניקח את ה (+) של $\sqrt{x}$ נקבל את השטח של הפונקציה בנקודות A ו P_2 עד ציר ה X ים (מלמעלה). ואם ניקח את ה (-) של $\sqrt{x}$ נקבל את שטח הפונקציה בין נקודות B ו P_1 עד ציר ה X ים (שמלמטה). מכאן אנו רואים כי אנו צריכים לחשב את שטח החלק העליון (+) של הפרבולה ולהפחית ממנו את שטח הישר.

לסיכום על מנת לחשב את השטח הרצוי עלינו לחשב את השטח בין שתי הפונקציות ולהוסיף לו את חלק השטח של הפרבולה בגבולות 0 ו 1.

$$S_1 = \int_1^4 [(\sqrt{x} + 3) - (x - 1)] dx = \quad \text{נחשב קודם את השטח העליון (+) בגבולות}$$

$$= \int_1^4 (x^{\frac{1}{2}} - x + 2) dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_1^4 = \frac{19}{6}$$

$$S_2 = \int_0^1 [(+\sqrt{x} + 3) - (-\sqrt{3} + 3)] dx =$$

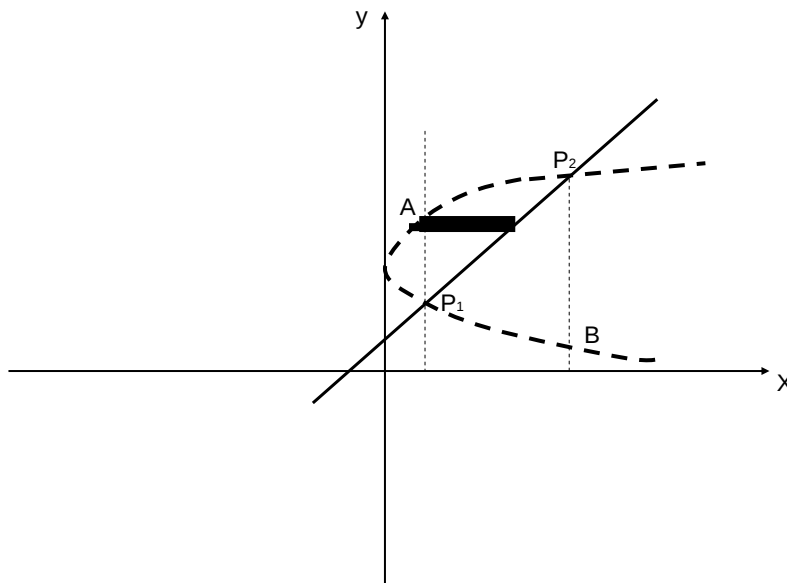
ועכשיו את שטח הפרבולה הלא מכוסה

$$= \int_0^1 2\sqrt{x} dx = 2 \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = 2 * \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

השטח המבוקש יהיה אם כן $S_1 + S_2$ והוא $\frac{9}{2}$.

חישוב על ידי פריסה לרצועות

נראה עכשיו דרך אחרת כיצד ניתן לחשב את השטח המבוקש.
ניקח את גרף הפונקציות



איור 22

אם נבצע אינטגרל על dy במקום על dx נראה כי זה יותר פשוט. השטח הזה

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{y_1}^{y_2} g(y) dy \quad \text{לכן}$$

כאשר $f(x)$ ו $g(y)$ הן פונקציות הפוכות זו לזו.

אנו ניקח "פרוסת" שטח - רצועה צרה **אופקית** - ראה שטח מוצלל בגרף.
רצועה זו היא מנקודה בפרבולה ועד לנקודה בישר ונעשה אינטגרל (סכום

כל הרצועות) מ y_1 עד y_2 .

כאשר הלכנו לפי x היו לנו שתי תוצאות ל y (+) ו (-) ואילו כאן לכל y יש רק תוצאה אחת של x ואת כל השטח המבוקש.

$$\begin{array}{ll} x_1 = (y-3)^2 & y_1 = \sqrt{x} + 3 \\ x_2 = y-1 & y_2 = x+1 \end{array} \quad \text{והפוכות הן}$$

נבצע אינטגרל לפי שטח הישר פחות שטח הפרבולה (ראה באיור).
הגבולות עכשיו יהיו גבולות מ $y_1 = 2$ ועד ל $y_2 = 5$ (ראה נקודות החיתוך).

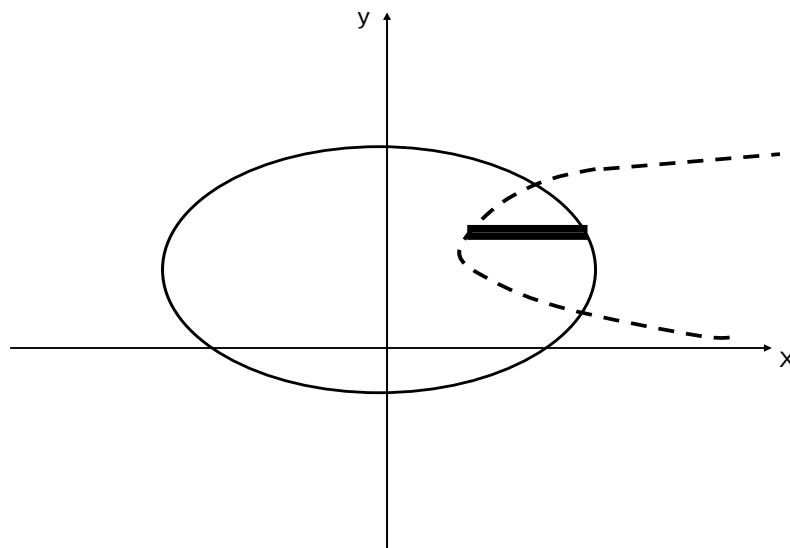
$$\begin{aligned} \int_2^5 [(y-1) - (y-3)^2] dy &= \int_2^5 (y-1-y^2+6y-9) dy = \\ &= \left| -\frac{y^3}{3} + 7\frac{y^2}{2} - 10y \right|_2^5 = 4.5 \end{aligned}$$

וזו בדיוק השטח כפי שקבלנו $\frac{9}{2}$.

אנו למדים כי על מנת לחשב שטח עלינו לבדוק היטב. לא תמיד קל לצייר את הפונקציות לכן רצוי לבדוק: נקודות חיתוך של הפונקציות עם הצירים, נקודות

קיצון (ע"י גזירה והשוואה ל 0) גזירה גם לפי $\frac{dy}{dx}$ וגם לפי $\frac{dx}{dy}$, לבדוק מספר

תוצאות של x ל y מסוים ומספר תוצאות של y ל x מסוים.
אם יש לנו פונקציות לולאה (סגורות) כגון מעגל, אליפסה וכד' אשר נחתכות על ידי פונקציה אחרת, כאן יש לנו שני שטחים המוגבלים על ידי הפונקציות



איור 23

במקרה זה כדאי ורצוי לבצע אינטגרל לפי dy ולקחת את ה (+) באליפסה.

$$y_2 = -x + 3 \quad \text{I} \quad y_1 = \frac{4}{x} - 2 \quad \text{נתונות הפונקציות}$$

חשב את השטח המוגבל ע"י הפונקציות.

$$\frac{4}{x} - 2 = -x + 3 \quad \text{ראשית נחשב את נקודות החיתוך}$$

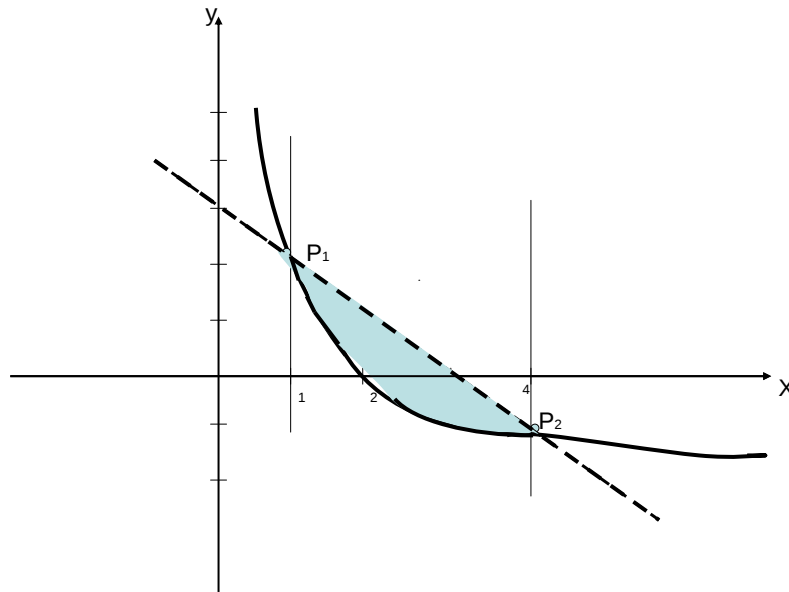
$$4 - 2x = -x^2 + 3x$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-4)(x-1) = 0$$

$$\text{ומכאן } x_2 = 4 \text{ ו } x_1 = 1 \quad y_2 = -1 \text{ ו } y_1 = 2 \quad \text{בהתאמה.}$$

נצייר את הגרף



איור 24

כאן אנו יכולים לבצע הן על פי dx והן על פי dy

$$\text{נבצע לפי } dx \text{ (פריסה אנכית)} \quad \int_1^4 (y_2 - y_1) dx = \int_1^4 (-x + 3 - \frac{4}{x} + 2) dx =$$

$$= \left| -\frac{x^2}{2} + 5x - 4 \ln x \right|_1^4 = (-8 + 20 - \ln 256) - (-\frac{1}{2} + 5 - 0) \approx 2$$

ועכשיו לפי dy (פריסה אופקית) נבטא את הפונקציה ההפוכה $x = \frac{4}{y_1 + 2}$

$$\int_{-1}^2 [(3-y) - (\frac{4}{y+2})] dy =$$

$$= \left| 3y - \frac{y^2}{2} - 4 \ln|y+2| \right|_{-1}^2 = (6 - 2 - \ln 256) - (-3 - \frac{1}{2} - 0) \approx 2$$

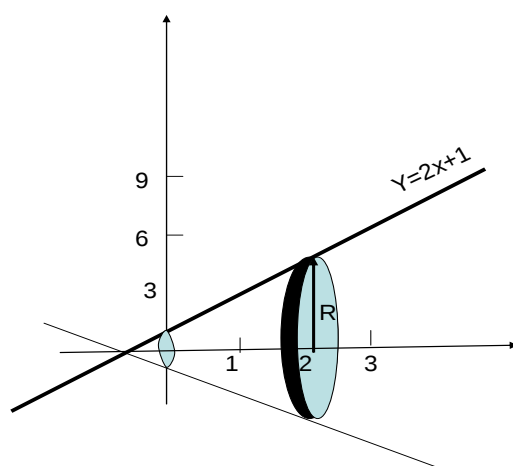
קבלנו אותו הדבר.

תרגיל: מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות

$$y = x^2 - 4x + 3 \quad \text{ו} \quad (x-3)^2 + y^2 = 4$$

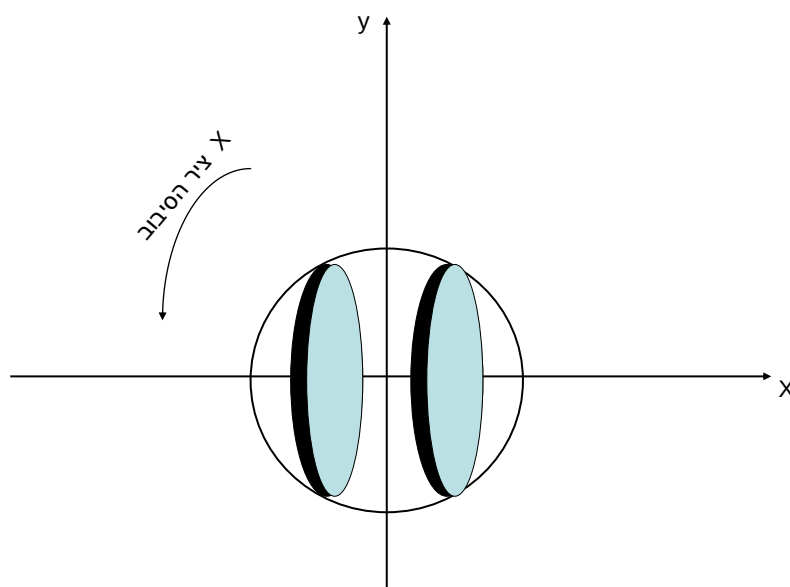
נפח של גוף סיבוב

אם ניקח גוף מישורי כלשהוא ונסובב סביב ציר נקבל גוף בעל נפח. נראה כיצד בעזרת אינטגרל נוכל למצוא את נפח גוף הסיבוב. גוף המסתובב סביב ציר יוצר משטח מעגלי. למשל ישר המסתובב סביב ציר X (סיבוב אופקי) נקבל חרוט



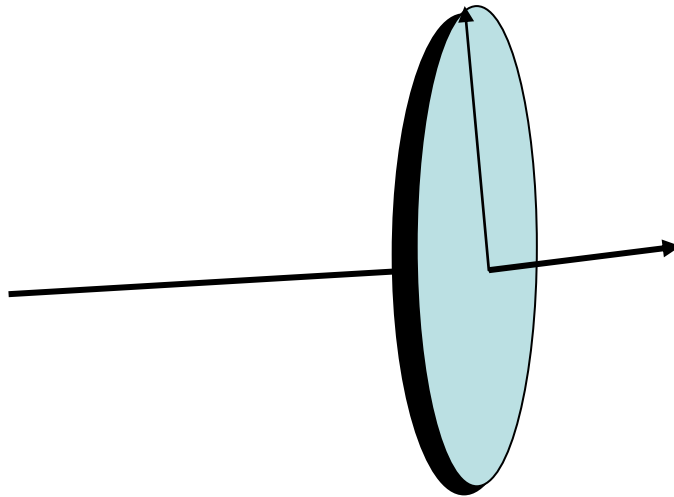
איור 25

או לדוגמא ניקח מעגל ונסובב אותו סביב אחד הצירים נקבל **כדור**.



איור 26

גם כאן נסתכל על "פרוסת נפח" שזו דיסקית בעובי של dx .



שטח מעגל הוא כידוע πR^2 ומאחר והגוף מסתובב סביב ציר ה X הרי שרדיוס הדיסקית הוא ערך ה Y בנקודה על המעגל המסתובב, ולכן שטח הדיסקה יהיה πy^2 , ונפח הדיסקה יהיה השטח מוכפל ב dx (עובי הדיסקה). אם ניקח את **סכום** (אינטגרל) של כל נפחי הדיסקות, נקבל את נפח הכדור. וה**סכום** הוא האינטגרל לאורך dx . בגלל סימטריה אנו יכולים לקחת רק רבע מעגל אשר מסתובב סביב ציר ה X זה נותן נפח של חצי כדור. הגבולות אם כך יהיו מ $x=0$ ועד $x=R$.

הנפח הוא האינטגרל על שטח הדיסקה πy^2 בגבולות אלו $V_{\text{גז}} = \int_0^R \pi y^2 dx$

מאחר ונוסחת המעגל היא $x^2 + y^2 = R^2$ אזי $y^2 = R^2 - x^2$ נציב

$$\int_0^R \pi(R^2 - x^2)dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^R = \frac{2\pi R^3}{3}$$

אבל זה רק חצי כדור לכן נפח כדור יהיה פי 2 והוא $V_{\text{כדור}} = \frac{4\pi R^3}{3}$

1. נתון הישר $y = 2x + 1$ נסובבו סביב ציר ה X ($y=0$) בין הגבולות $x=0$ ו $x=2$.

חשב את נפח החרוט הקטום המתקבל. (ראה איור 25 עמ' 35)

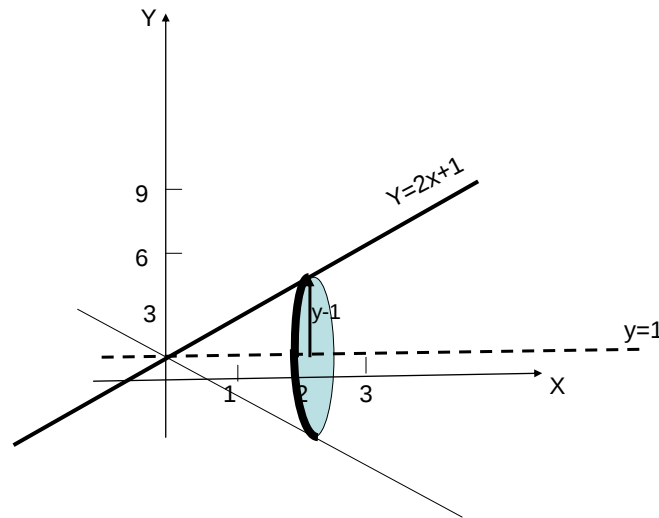
נבצע אינטגרל $\int_0^2 \pi y^2 dx = \pi \int_0^2 (2x+1)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 + 4x + 1) dx =$

$$= \pi \left[\frac{4x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + x \right]_0^2 = \pi \frac{62}{3}$$

וזה נפח החרוט הקטום.

2. נראה עכשיו את אותו ישר המסתובב סביב ציר $y=1$. (ראה קו מרוסק באיור)

עכשיו רדיוס החרוט הוא מ $y=1$ עד לקו הישר $y=2x+1$



איור 27

לכן ניקח

$$\int_0^2 \pi(y-1)^2 dx = \pi \int_0^2 (2x)^2 dx = \pi \left| \frac{4x^3}{3} \right|_0^2 = \frac{32\pi}{3}$$

3. מצא את נפח גוף הסיבוב של הפונקציה $y^2 = 6x$ סביב ציר ה X בגבולות $x=2$ ו $x=0$

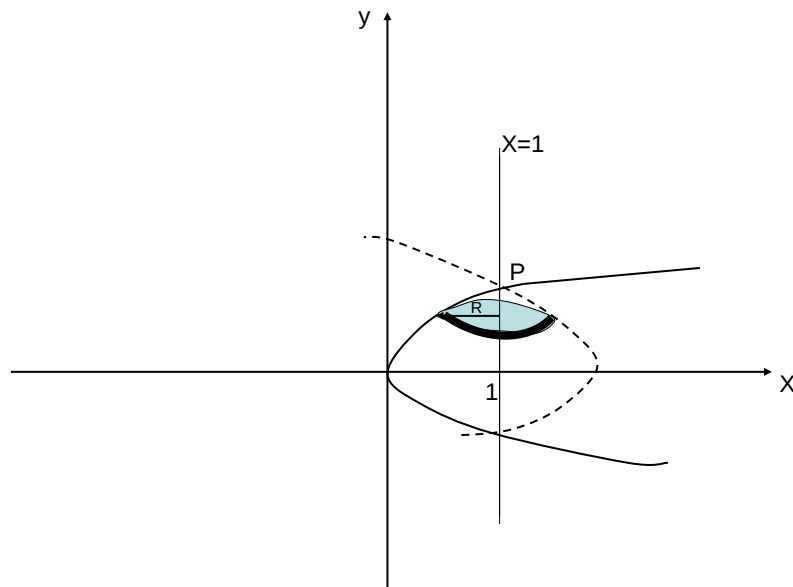
הערה: מאחר והפרבולה סימטרית סביב ציר X , כלומר לכל X יש 2 ערכים ל Y , הסיבוב של החלק התחתון (מתחת לציר X) מתלכד עם הסיבוב של החלק העליון.

אם לא היתה פונקציה סימטרית היינו צריכים להגדיר לאיזה חלק של הפונקציה רוצים את נפח הסיבוב, מעל או מתחת לציר X .

$$\int_0^2 \pi y^2 dx = \pi \int_0^2 6x dx = \pi \left| \frac{6x^2}{2} \right|_0^2 = 12\pi$$

נבצע אינטגרל

4. מצא את נפח הסיבוב של הפונקציה $y^2 = 6x$ סביב ציר $x=1$ (אנכי!) נצייר את הגרף



איור 28

הגוף הוא מין אליפסואיד (דמוי צלחת מעופפת).
 ניקח "פרוסת נפח" (הדיסקה האופקית המוצללת בגרף) שעוביה הוא dy .
 הרדיוס כפי שרואים הוא מנקודה על הפונקציה ועד ציר הסיבוב $x=1$.
 עקב הסימטריה נוכל לקחת רק את הרביע הראשון ולהכפיל פי 2.
 הרדיוס הוא $R=1-x$ ונפח הדיסקה יהיה אם כן
 אנו הולכים לפי dy $V_{דיסקה} = \pi R^2 dy = \pi(1-x)^2 dy$

הפונקציה $y^2 = 6x$ כלומר $x = \frac{y^2}{6}$ נחשב את גבולות ה

הגבול התחתון הוא $y=0$ והעליון נחשב על פי $x=1$ ואז $y=\sqrt{6}$

$$\int_0^{\sqrt{6}} \pi(1-x)^2 dy = \pi \int_0^{\sqrt{6}} \left(1 - \frac{y^2}{6}\right)^2 dy =$$

נעשה אינטגרל ונציב

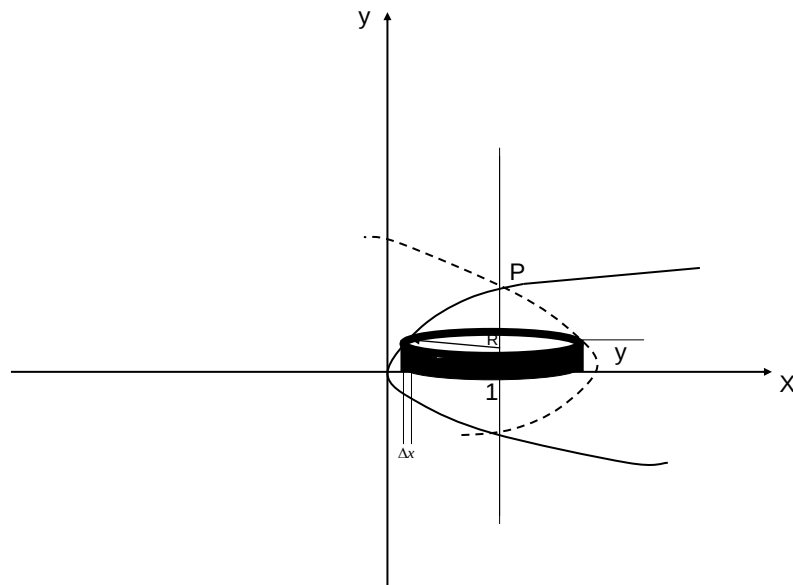
$$\pi \int_0^{\sqrt{6}} \left(1 - \frac{2y^2}{6} + \frac{y^4}{36}\right) dy = \pi \left| y - \frac{y^3}{9} + \frac{y^5}{5 \cdot 36} \right|_0^{\sqrt{6}} = 1.3\pi$$

$$V_{גוף} = 2.6\pi$$

ובכדי לקבל את כל הנפח עלינו להכפיל ב 2

5. נראה עכשיו כאשר אנו לוקחים "פרוסה" טבעית .

אנו הולכים לפי dx (ראה איור 29)



איור 29

מאחר והגוף סימטרי ניקח רק את החלק העליון ונכפיל פי 2. נסתכל על הטבעת. עובי הטבעת הוא dx , גובה הטבעת הוא y ורדיוס הטבעת הוא $R = 1 - x$ והפונקציה כידוע היא $y^2 = 6x$ או $y = \sqrt{6x}$. נחשב את "פרוסת" הנפח הטבעתי. היקף הטבעת הוא $2\pi R$. נפח הטבעת יהיה (רוחב*עובי*גובה)

$$V_{\text{טבעת}} = 2\pi R * dx * y = 2\pi(1-x)ydx$$

נבצע אינטגרל בגבולות $x=0$ עד $x=1$ ונקבל את נפח חצי הגוף.

$$\int_0^1 2\pi(1-x)ydx = 2\pi \int_0^1 (1-x)\sqrt{6x}dx = 2\pi\sqrt{6} \int_0^1 (\sqrt{x} - \sqrt{x^3})dx =$$

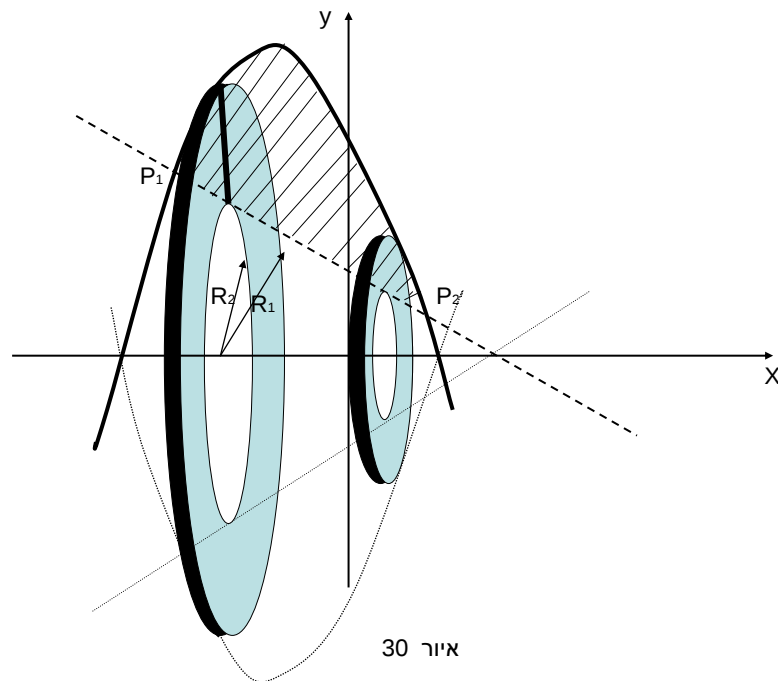
$$= 2\pi\sqrt{6} \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}})dx = \left| \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right|_0^1 = \frac{8\sqrt{6}\pi}{15} = 1.3\pi$$

$$V_{\text{גוף}} = 2.6\pi$$

נכפיל פי 2 ונקבל את נפח הגוף כפי שקבלנו.

6. מצא את נפח גוף הסיבוב סביב ציר ה X הנוצר מהשטח המוגבל בין שתי הפונקציות $y_1 = -x^2 - 3x + 6$ ו $y_2 = 3 - x$

נראה את הגרף



איור 30

השטח המקווקו הוא המסתובב סביב ציר ה X .

ראשית נמצא את נקודות החיתוך

$$\begin{aligned} 3-x &= -x^2 - 3x + 6 \\ -x^2 - 2x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

ושני הפתרונות הם $x_1 = -3$ $x_2 = 1$ ו $y_1 = 6$ $y_2 = 2$ בהתאמה.

נקודות החיתוך הן $P_1(-3;6)$ ו $P_2(1;2)$

שים לב: אנו ניקח טבעת אנכית מאחר ואם ניקח טבעת אופקית אזי ל y (מעל $y=6$) יהיו 2 נקודות ל X ונצטרך להתחשב בהם.

רוחב הטבעת הוא $y_1 - y_2$, לכן שטח הטבעת הוא $\pi R_1^2 - \pi R_2^2$
עוביה של הטבעת הוא dx לכן פרוסת נפח הטבעת היא $(\pi R_1^2 - \pi R_2^2) dx$

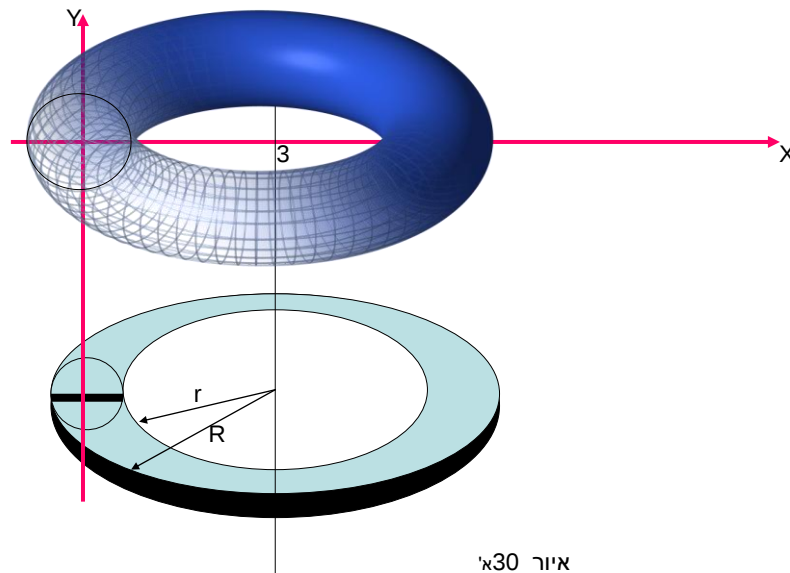
R_1 הוא ערך ה y של הפרבולה y_1

R_2 הוא ערך ה y של הישר y_2

עכשיו נבצע אינטגרל על פרוסות הטבעות מ $x = -3$ ועד $x = 1$

$$\begin{aligned} \int_{-3}^1 (\pi y_1^2 - \pi y_2^2) dx &= \pi \int_{-3}^1 [(-x^2 - 3x + 6)^2 - (3 - x)^2] dx = \\ &= \pi \int_{-3}^1 (x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 30x + 27) dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{6x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{30x^2}{2} + 27x \right]_{-3}^1 = \\ &= \approx 119.5\pi \end{aligned}$$

7. חשב את נפח גוף הסיבוב הנוצר מהמעגל $x^2 + y^2 = 1$ הסובב סביב $x = 3$.
נראה את הגרף



מתקבל "גלגל". נסתכל על פרוסת נפח (ראה באיור) – טבעת בעובי dy שטח הטבעת הוא שטח העיגול החיצוני פחות שטח העיגול הפנימי. שים לב: לכל X על המעגל יש 2 ערכי Y , ולכל Y יש 2 ערכי X . אנו הולכים על טבעת אופקית ששטחה הוא $\pi R^2 - \pi r^2$ רדיוס הסיבוב הוא $(3-x)$ ויש לנו כאמור 2 ערכי X $X = \pm\sqrt{1-y^2}$ לכן שטח הטבעת יהיה

$$\begin{aligned} & \pi[3 - (-)\sqrt{1-y^2}]^2 - \pi[3 - (+)\sqrt{1-y^2}]^2 = \\ & = \pi[9 + 6\sqrt{1-y^2} + 1 - y^2 - 9 + 6\sqrt{1-y^2} - 1 + y^2] = 12\pi\sqrt{1-y^2} \\ & \text{ונפח הטבעת תהיה } V_{\text{טבעת}} = 12\pi\sqrt{1-y^2} dy \end{aligned}$$

על זה נבצע אינטגרל מ $y = -1$ ועד $y = +1$

$$V_{\text{גלגל}} = 12\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy$$

נעשה הצבה $y = \cos u$ נגזור $dy = -\sin u \cdot du$ והגבולות יהיו כאשר $y = -1$ $u = -\pi$ וכאשר $y = 1$ $u = 0$

$$V_{\text{גלגל}} = 12\pi \int_{-\pi}^0 \sqrt{1-\cos^2 u} (-\sin u) du = 12\pi \left[\frac{1}{2} (y - \frac{1}{2} \sin 2y) \right]_{-\pi}^0$$

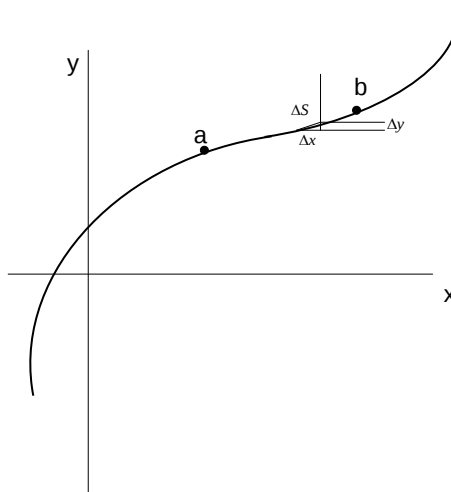
נציב ונקבל $V_{\text{גלגל}} = 6\pi^2$ (ראה עמוד 13).

נבדוק:

שטח חתך של הגלגל הוא אחיד לכל היקפו, ורדיוס ההקף הוא 3
לכן $V_{\text{גלגל}} = \pi * 1^2 * 2\pi * 3 = 6\pi^2$
בדיוק כפי שקבלנו.

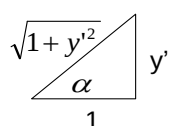
אורך קשת

אם נתונה פונקציה רציפה ואנו רוצים למצוא את אורך הקשת S בין a ל b . ראה בהגדלה איור 31

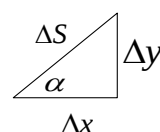


איור 31

נסתכל על שתי נקודות סמוכות. אם ניקח אותן מספיק קרובות ניתן לראות (בקירוב טוב) את הקטע כקו ישר. ואז מתקבל משולש ישר זווית שהיתר הוא ΔS והניצבים הם Δx ו Δy . ראה באיור 32.



$$y' = \tan \alpha$$



במשולש y' אנו רואים כי היתר לפי פיתגורס הוא $\sqrt{1 + y'^2}$

ובמשולש ΔS אנו רואים $\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

איור 32

אם נעשה סכום (אינטגרל) של כל ה- ΔS ים מ- a ועד b נקבל את אורך הקשת

$$S = \int_a^b ds \quad \text{נכתוב זאת}$$

$$\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad \text{באיור 32 ראינו כי}$$

נכפיל ונחלק בתוך השורש ב Δx^2 ונקבל

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} * \Delta x = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

את זה כבר ראינו במשולש ה- y' באיור 32.
נציב זאת בתוך האינטגרל ונקבל כי אורך קשת מ- a ועד b הוא

$$S = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx \quad \text{הולכים לאורך } dx$$

דוגמאות

1. נתונה הפונקציה $y = 2x + 1$ (קו ישר) מהו אורך הקו מ $x = 0$ עד $x = 3$.
הנגזרת היא $y' = 2$ ובריבוע $y'^2 = 4$

$$\int_0^3 \sqrt{1^2 + 2^2} dx = \sqrt{5} |x|_0^3 = 3\sqrt{5} \quad \text{נבצע אינטגרל}$$

צייר את הגרף ובדוק בדרך גיאומטרית!.

2. נתונה הפונקציה $y = \sqrt{x^3}$ מה אורך הקשת מ $x = 0$ עד $x = 5$

נמצא את הנגזרת של $y = x^{\frac{3}{2}}$ והיא $y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$ ובריבוע $y'^2 = \frac{9}{4} x$

$$S = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x} * dx \quad \text{נציב באינטגרל}$$

$$dz = \frac{9}{4} dx \quad \text{נגזור} \quad z = 1 + \frac{9}{4} x$$

נראה את גבולות Z כאשר $x = 0$

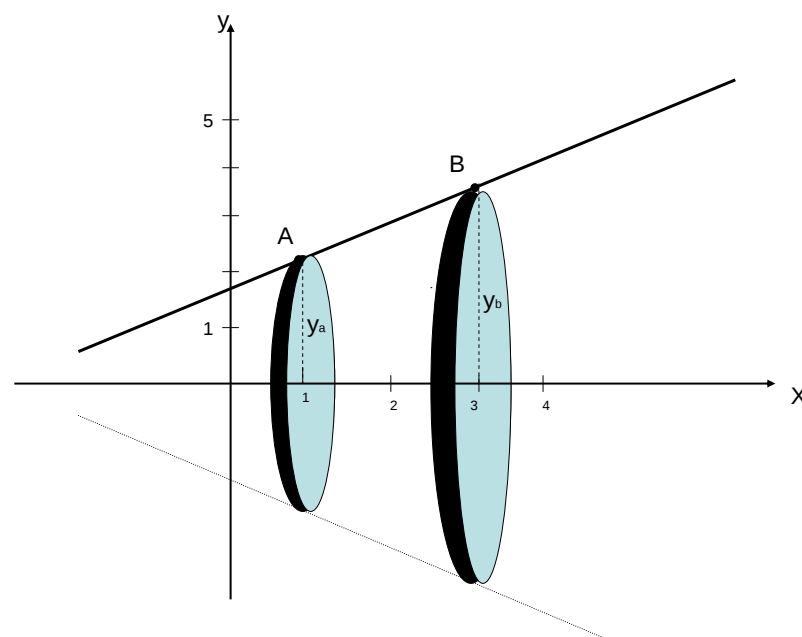
$$z = \frac{49}{4} \quad \text{כאשר } x = 5$$

$$\int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x} * dx = \frac{4}{9} \int_1^{\frac{49}{4}} \sqrt{z} dz = \frac{4}{9} \left[\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \right]_1^{\frac{49}{4}} = \frac{335}{27} \quad \text{נציב}$$

נפח גוף סיבוב סביב ישר כלשהוא

ניקח דוגמאות למציאת נפח של גוף הנוצר מסיבוב של ישר אחד, סביב ישר כלשהוא במישור, אשר תבהיר את משמעות האינטגרל. בפתרון הדוגמאות נעשה שיקולים גיאומטריים מוכרים ונבצע על פיהם את האינטגרל תוך מתן הסברים, על מנת להמחיש ולהבין את פעולת האינטגרל. הפתרונות הינם ספציפיות לדוגמאות אלו ואינן נותנות "דרך" כללית לפתרון והן נכונות לגבי ישרים בלבד.

ראינו כי על מנת למצוא שטח או נפח יצרנו "פרוסה" שעליה ביצענו אינטגרל אשר נתן לנו את כל השטח או הנפח המבוקש. באיור 33 אנו רואים סיבוב סביב ציר X .



איור 33

לקחנו "פרוסה" - דיסקה, אשר עוביה הוא dx או dy ועשינו אינטגרל לאורך ציר הסיבוב X או Y .

אנו למדים כי, רדיוס הסיבוב הוא מאונך לציר הסיבוב. ואת האינטגרל עושים לאורך הציר. אם הגוף מסתובב סביב X בדרך כלל אנו עושים לפי dx ואם מסתובב סביב Y האינטגרל הוא בדרך כלל לפי dy (אפשר גם להיפך). נראה כיצד ייראה גוף סיבובי סביב ישר כלשהוא המשמש כציר.

דוגמא

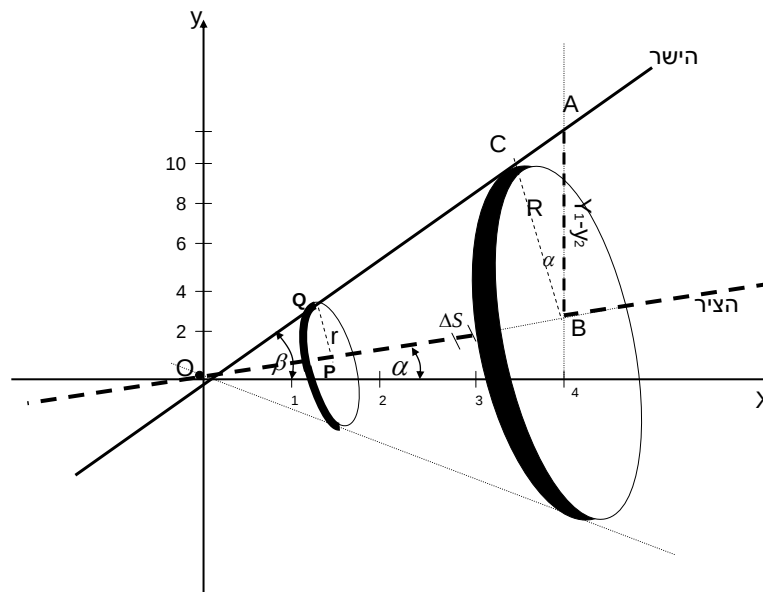
ראשית ניקח ישרים העוברים דרך הראשית.

מצא את נפח גוף הסיבוב הנוצר מהישר $y_1 = 3x$ המסתובב סביב

הישר $y_2 = \frac{1}{2}x$ בין הגבולות $x=0$ ו $x=4$

נשים לב כי אנו רוצים סיבוב סביב הציר שהוא $y_2 = \frac{1}{2}x$

נעביר את האנכים לישר (הציר) ב $x=0$ וב $x=4$ ראה איור 34
 הישר $y_1 = 3x$ מסתובב על הציר בין O ו B .
 הגוף הנוצר הוא חרוט שקודקודו ב O .



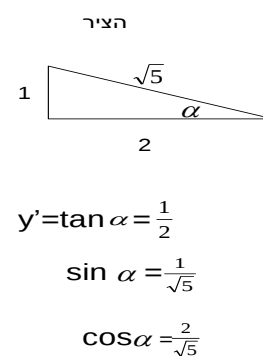
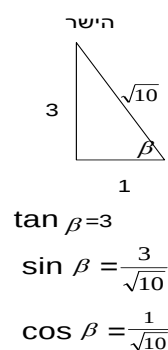
איור 34

שים לב: המשולש $\triangle ABC$ אינו משולש ישר זווית.
 ניקח עכשיו "פרוסת נפח" – דיסקה שעוביה הוא ΔS (קו שחור עבה).
 נסתכל על המשולש $\triangle OCB$ הוא ישר זווית $\angle B = 90^\circ$
 וזווית O במשולש זה היא $\angle O = \beta - \alpha$ בסיס המשולש הוא הקטע OB .
 רדיוס הסיבוב הוא R כלומר הקטע BC . במשולש זה $\tan(\beta - \alpha) = \frac{R}{OB}$

$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta * \tan \alpha} \quad \text{ידועה הזהות}$$

$$\tan \alpha = y'_2 = \frac{1}{2} \quad \tan \beta = y'_1 = 3 \quad \text{את הטנגנסים נמצא בעזרת הנגזרות.}$$

מכאן נצייר את משולשי ישרי הזווית המתאימים



נחשב את $\tan(\beta - \alpha)$ על פי הזהות והנגזרות שמצאנו

$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3 * \frac{1}{2}} = 1$$

הערה: במקרה זה המשולש $\triangle OBC$ הוא ישר זווית ש"ש $\angle(\beta - \alpha) = 45^\circ$.

הקטע $OB = \sqrt{x^2 + y^2}$ על ישר הציר. ובאופן כללי הקטע OP (נקודה כלשהיא על הציר) יהיה

$$OP = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2} = \frac{1}{2}x\sqrt{5}$$

נמצא את r במשולש OPQ $\tan(\beta - \alpha) = \frac{r}{OP} \Rightarrow (r = OP)$

$$r = OP * \tan(\beta - \alpha) = \frac{1}{2}x\sqrt{5} * 1$$

אנו צריכים את r^2 לכן $r^2 = \frac{1}{4}x^2 * 5$

מכאן נפח "פרוסת הדיסקה" הוא $V_{דיסקה} = \pi * (OP)^2 * ds$

ds מכיון שאנו הולכים לאורך הציר.

ds הוא עובי הפרוסה והוא על היתר של משולש ישר הזווית בעל $\angle \alpha$ נראה מהו ds אם נסתכל במשולש הציר (ראה עמ' 42 ועמ' 45)

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad ds = \frac{dx}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

ועכשיו נבצע אינטגרל על "פרוסת" הדיסקה ונמצא את נפח הסיבוב

$$\int_0^4 \pi r^2 * ds = \pi \int_0^4 \frac{5}{4} x^2 * \frac{dx}{\cos \alpha}$$

$$V_{\eta} = \frac{5\pi}{4 \cos \alpha} \int_0^4 x^2 dx = \frac{5\pi\sqrt{5}}{4 * 2} \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^4 = \frac{40\sqrt{5}}{3} \pi$$

נפח הגוף יהיה אפוא

נבדוק את התוצאה על פי נוסחת חישוב של חרוט.

$$R^2 = 20 \quad | \quad R = BC = 2\sqrt{5} \quad R \text{ הרדיוס}$$

גובה החרוט הוא הקטע OB והוא $\sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

$$\text{נוסחת נפח חרוט} = \frac{\text{גובה} * \text{בסיס}}{3}$$

$$V = \frac{\pi}{3} * 20 * \sqrt{20} = \frac{40\sqrt{5}}{3} \pi$$

נציב ונקבל בדיוק כפי שקבלנו.

בהמשך נראה גם פתרון בצורה שונה עי המשולש $\triangle ABC$.

נראה עכשיו לגבי גבולות $x=2$ עד $x=4$ כאן מתקבל חרוט קטום.

$$\int_2^4 \pi \frac{5}{4} x^2 * \frac{dx}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5} * \pi}{2 * 4} \left| \frac{x^3}{3} \right|_2^4 = \frac{70\sqrt{5}}{6} \pi$$

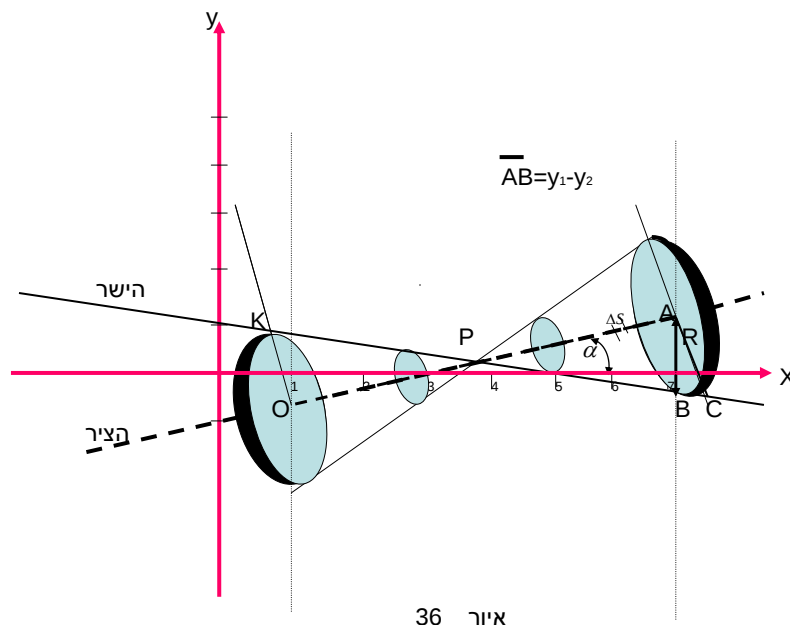
$$V_{\text{קטום}} = \frac{40\sqrt{5}}{3} \pi - \frac{10\sqrt{5}}{6} \pi = \frac{70\sqrt{5}}{6} \pi$$

בדיקה:

מה שראינו מתאים לישרים העוברים דרך הראשית.

נראה מה קורה באופן כללי ל 2 ישרים כלשהם.

1. מצא את נפח גוף הסיבוב של הישר $5y = 5 - x$ הסובב סביב הציר $3y = x - 3$ בגבולות $x = 1$ עד $x = 7$.
נראה את הגרף.



איור 36

מתקבלים שני חרוטים בעלי קודקוד משותף P.
נסתכל על משולש $\triangle ABC$ (אינו ישר זווית) ראה דיסקה ימנית באיור.
מהכלים הגיאומטריים שברשותינו נמצא כי הזווית במשולש זה הן:
 $\angle A = \alpha$, $\angle B = 270 - \beta$, $\angle C = \beta - \alpha - 90$ והקטע AB הוא $(y_1 - y_2)$.

$$\frac{R}{\sin B} = \frac{y_1 - y_2}{\sin C} \quad \triangle ABC \text{ משולש בסינוסים}$$

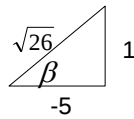
$$R = \frac{(y_1 - y_2) \sin B}{\sin C} \quad \text{ומכאן}$$

$$\sin B = \sin(270 - \beta) = -\sin(\beta - 90) = -\cos \beta$$

$$\sin C = \sin(\beta - \alpha - 90) = -\cos(\beta - \alpha) = -(\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha)$$

שים לב: הנגזרת של הישר היא (-) זה אומר שהזווית היא קהה.
מאחר ו β זווית קהה ה $\cos \beta$ הוא שלילי.
נסתכל על המשולשים המתאימים

הישר



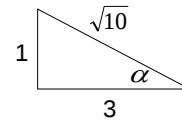
$$y' = \tan \beta$$

$$\tan \beta = -\frac{1}{5}$$

$$\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$\cos \beta = -\frac{5}{\sqrt{26}}$$

הציר



$$y' = \tan \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

איור 37

$$\sin C = +\frac{14}{\sqrt{26} * \sqrt{10}} \quad \sin B = +\frac{5}{\sqrt{26}} \quad \text{נציב ונמצא כי}$$

$$R = \frac{(y_1 - y_2) \sin B}{\sin C} = \frac{5\sqrt{10}}{14} (y_1 - y_2) \quad \text{נציב ב R}$$

$$y_1 - y_2 = \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x - 2 = \frac{8}{15}x - 2 \quad \text{נציב את הישרים}$$

$$R^2 = \left[\frac{5\sqrt{10}}{14} \left(\frac{8}{15}x - 2 \right) \right]^2 \quad \text{נציב ב R} \quad R^2 \text{ ואז } R = \frac{5\sqrt{10}}{14} \left(\frac{8}{15}x - 2 \right)$$

$$V_{\text{דיסקה}} = \pi R^2 ds \quad \text{ניקח "פרוסת נפח" - דיסקה בעובי } ds$$

$$\int \pi R^2 ds = \pi \int \left(\frac{5\sqrt{10}}{14} \left(\frac{8x}{15} - 2 \right) \right)^2 ds = \quad \text{ועכשיו נעשה אינטגרל}$$

$$ds = \frac{dx}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + y'^2} dx \quad \text{ראינו כי}$$

$$\begin{aligned} \pi \int_1^7 \frac{25 * 10}{196} \left(\frac{64x^2}{225} - \frac{32x}{15} + 4 \right) \frac{dx}{\cos \alpha} = \\ = \pi \frac{250\sqrt{10}}{196 * 3} \int_1^7 \left(\frac{64x^2}{225} - \frac{32x}{15} + 4 \right) dx = \end{aligned} \quad \text{נציב את } \cos \alpha$$

$$V_{\text{כללי}} = \pi \frac{250\sqrt{10}}{196 * 3} \left[\frac{64x^3}{225 * 3} - \frac{32x^2}{15 * 2} + 4x \right]_1^7 = 1.344\pi(8.25 - 3.02) \approx 7\pi$$

נבדוק: נמצא את גובהי החרוטים ואת שטחי בסיסם

$$V_{\text{חרוט}} = \frac{\text{גובה} * \text{בסיס}}{3} \quad \text{ונשתמש בנוסחה}$$

$$-\frac{1}{5}x + 1 = \frac{1}{3}x - 1 \quad \text{נמצא את נקודת החיתוך P}$$

$$\left(\frac{15}{4}; \frac{1}{4}\right) P \quad y_P = \frac{1}{4} \quad \text{I} \quad x_P = \frac{15}{4} \quad \text{מכאן}$$

הגובה של האחד הוא AP. הנקודה A היא על ישר הציר

$$A\left(7; \frac{4}{3}\right) \quad \text{לכן נקודה A} \quad y = \frac{4}{3} \quad \text{ה} \quad x = 7 \quad \text{וכאשר}$$

$$H_1 = \sqrt{\left(7 - \frac{15}{4}\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{4}\right)^2} = 3.4 \quad \text{והגובה הוא המרחק AP}$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{11}{4}\right)^2 + \left(\frac{11}{12}\right)^2} = 2.8 \quad \text{באותו אופן (כאשר } x=1 \text{) לחרוט השני}$$

$$R_{x=7} = \frac{5\sqrt{10}}{14} \left[\frac{7}{3} - 1 - \left(\frac{-7}{5} + 1 \right) \right] = 1.96 \quad \text{נחשב את הרדיוסים}$$

$$R_{x=1} = \frac{5\sqrt{10}}{14} \left[\frac{1}{3} - 1 - \left(\frac{-1}{5} + 1 \right) \right] = 1.67$$

$$B_1 = \pi R_1^2 = \pi 1.96^2 = 3.85\pi$$

ושטחי הבסיסים

$$B_2 = \pi 1.67^2 = 2.79\pi$$

$$V_1 = \frac{B_1 * H_1}{3} = \frac{3.85 * 3.4}{3} \pi = 4.37\pi$$

והנפחים בהתאם

$$V_2 = \frac{B_2 * H_2}{3} = \frac{2.79 * 2.8}{3} \pi = 2.60\pi$$

$$V_1 + V_2 = 4.37 + 2.60 = 6.97\pi \approx 7\pi \quad \text{וסה"כ הנפח הוא}$$

כפי שקבלנו (אי הדיוק הוא מהשורש והטריגונומטריה).

משתנה האינטגרל שלנו הוא dx בגבולות $x=1$ עד $x=7$. משתנה הציר הוא dS בין הנקודות O ו A (ראה איור 36) והישר המסתובב מחושב בין הנקודות K ו C

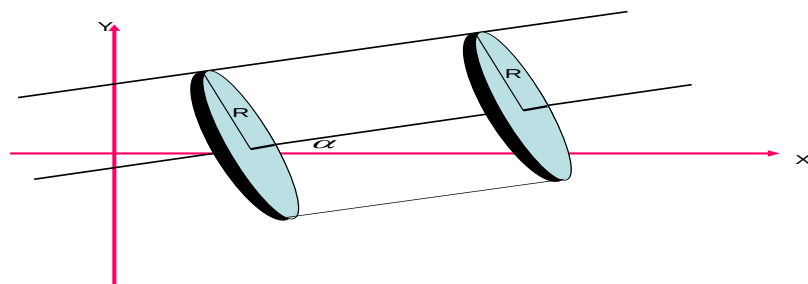
נראה מה קורה כאשר הישר מאונך לציר או מקביל לו.

כאשר הישר מאונך לציר, נפח הסיבוב הוא אפס מאחר ואין עובי ds .

וכאשר הישר הוא מקביל לציר, נגזרת הישר זהה לנגזרת הציר והזווית

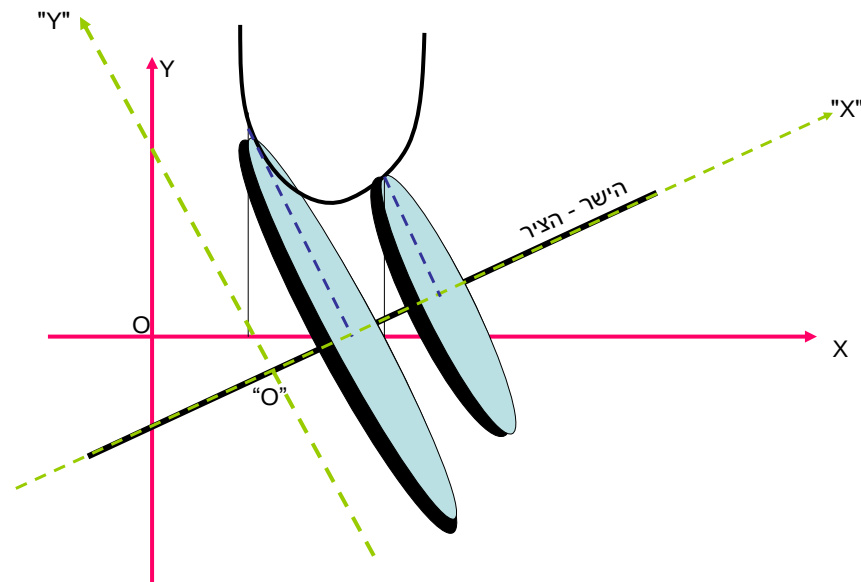
$$\cos(\beta - \alpha) = \cos 0 = 1 \quad \text{ואז} \quad \alpha = \beta$$

רדיוס הסיבוב יהיה $R = (y_1 - y_2) \cos \alpha$ וקבוע. והגוף המתקבל הוא גליל



איור 38

כמובן שאפשר למצוא נפח של פונקציה כלשהיא הסובבת סביב ישר כלשהוא. אנו יכולים ל"בנות" מערכת צירים חדשה כך שהציר "X" החדש יתלכד עם (הישר) ציר הסיבוב, ואת הפונקציה בהתאם לצירים החדשים "X" ו "Y". מה שאנו עושים, "מעתיקים" את מערכת הצירים הקיימת למערכת צירים חדשה (ראה קוים מרוסקים באיור), ונותנים לפונקציה את ערכי הצירים החדשה. גם גבולות האינטגרל יעברו למערכת החדשה.



איור 39

הראשית O מועתקת לראשית חדשה "O" כך שהציר מתלכד עם הישר אז מקבלים פונקציה (חדשה) הסובבת סביב ציר "X" חדש, ומשתמשים בכל הכלים שאנו מכירים לגבי מערכת צירים רגילה (סיבוב סביב ציר X). ולאחר הפתרון חוזרים שוב למערכת המקורית. את שיטת המעבר ממערכת צירים אחת לשניה ילמד זה אשר ימשיך בלימוד מתקדם. בזה נסתפק, ונקווה כי חוברת זו אכן תרמה להבנת החומר. כל מה שיש לעשות עתה הוא לקחת ולתרגל. בהצלחה!