

מנסים להוכיח: קיומם של מספרים אי-רציונליים

שכבת גיל

חטיבת ביניים – כיתות ח'–ט'

חטיבה עליונה – כיתות י'–יא'

תקציר הפעילות

בפעילות זו התלמידים ייחשפו לעולם המספרים האי-רציונליים. הם ילמדו כיצד אפשר להוכיח בדרך השלילה ויבצעו הוכחות גם באופן אלגברי וגם גרפי. הפעילות נועדה ברובה לעבודה בזוגות, ומתאימה להעמקת נושא עולם המספרים.

משך הפעילות

שני שיעורים

מטרות הפעילות

- לבנות בשיטתיות את מערכות המספרים העיקריות.
- לבנות הקשר בין אריתמטיקה ובין תחומי דעת אחרים.
- לפתח מיומנות של שימוש בהצגות שונות של מספרים בהתאם לנסיבות המתמטיות.

מושגים מתוכנית הלימודים

מספרים אי-רציונליים, בניות, משפט פיתגורס, מספרים רציונליים, מספרים ממשיים, הוכחות

מיומנויות

הבניית ידע, יישום ידע, פתרון בעיות וקבלת החלטות, רפלקטיביות לתהליך הלמידה

אופי הלמידה

כיתתי, זוגות

סוג הפעילות

פעילות להקניית הנושא

קישורים לסרטונים ולכתבות

כל אחד מהסרטונים הבאים:

- "עולם המספרים הממשיים": <https://bit.ly/3kfGmxY>
- "השורש הריבועי של 2": <https://bit.ly/3kfGmxY>
- "תיאור תהליך הגילוי של היפאסוס": <https://bit.ly/37yi0vM>

הכתבה הבאה:

- "מספרים ושורשים אי-רציונליים": <https://bit.ly/3jgwzlf>

הכנות לקראת הפעילות

- להכין סרגל ליצירת ציר מספרים, ומחוגה לטובת יצירת קטעים על ציר מספרים.
- לדאוג למקרן, רמקולים וחיבור אינטרנט להקרנת הפעילות והסרטון.

מה עושים?

חלק א': הוכחה בדרך השלילה

מומלץ לבצע חלק זה במליאה יחד עם התלמידים.

לעיתים, במקום להוכיח טענה באופן ישיר, קל יותר להפריך את הטענה הנגדית לה. מהלך זה נקרא "הוכחה בדרך השלילה".

למשל, נרצה להוכיח שלא כל הכבשים בעולם בצבע לבן. דרך ההוכחה תהיה כך:

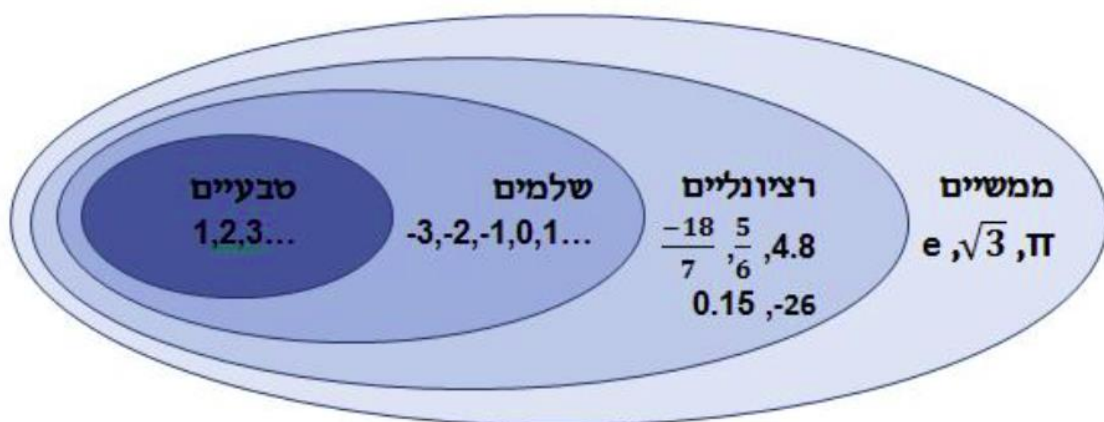
1. תחילה ננסח את מה שאנו רוצים לטעון, והוא שיש כבשים שהן לא בצבע לבן.
2. ננסח טענה נגדית. זו הטענה הנגדית: **כל הכבשים בעולם בצבע לבן.**
3. נשאר לנו להראות שמצאנו כבשה בצבע שחור (או כל צבע שאינו לבן); וכעת הטענה הנגדית שקרית. מכך נובע שהטענה המקורית היא טענת אמת.

כדי להשתמש בהוכחה בדרך השלילה, נבצע את השלבים הבאים:

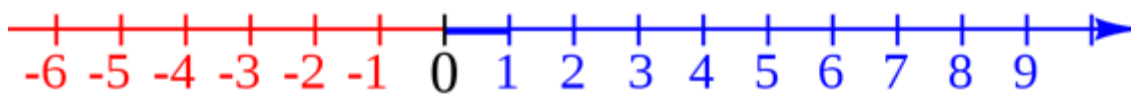
שימו לב, טענה נגדית אינה מנוסחת בהכרח בשפה שבה מבינים אותה התלמידים. כך לדוגמה הנגדי ל"אף פעם לא" הוא לא "תמיד", אלא טענת "קיים".

1. הניחו את הטענה שיש להוכיח (A) נכונה.
2. נסחו טענה B, שנגדית לטענה A.
3. הוכיחו כי טענה B שקרית וסותרת את תנאי השאלה, כללי המתמטיקה או ה"עולם" שמתואר בבעיה.
4. מכיוון שהטענות נגדיות, אם B שקרית, אזי A טענת אמת. משמע: לא יכול להיות שטענה A לא נכונה.

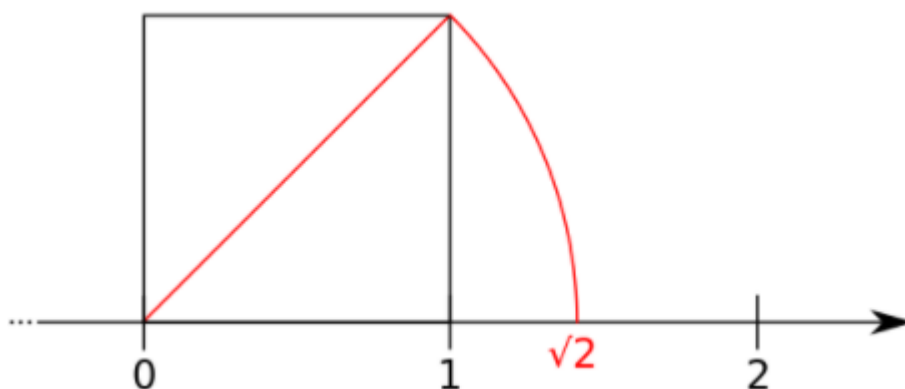
יש לשים לב כי שיטה זו משתמשת בעיקרון שנקרא "השלישי הנמנע" בלוגיקה: או שטענה נכונה, או שאינה נכונה (אין אפשרות שלישית). מחמנים לקרוא עוד על הנושא בקישור הבא: <https://bit.ly/2FNfGWq>.



מתוך: אתר מכון דוידסון, "מספרים ושורשים אי-רציונליים": <https://bit.ly/38XFIYd>.



למורה



איור: ויקיפדיה

המשך עבודה במליאה, בשיתוף התלמידים ומתן אפשרות מענה. חלק זה מעט קשה מדי להתנסות בזוגות.

נוכיח כעת כי קיימים מספרים אי-רציונליים על ידי כך שנראה ש- $\sqrt{2}$ אי-רציונלי:

טענה A תהיה: $\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.

טענה B תהיה: קיימים m ו- n שהם מספרים טבעיים זרים, כך ש: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. כלומר $\sqrt{2}$ הוא מספר: **רציונלי**.

נוכיח כי טענה **B** שקרית:

נניח כי קיימים m ו- n שהם מספרים טבעיים זרים, כך ש: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

א. נעלה כל אגף בריבוע. השלימו את אגפי המשוואה ופשטו את המשוואה כך שכל אגף יכיל משתנה אחד

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2$$

$$m^2 = 2n^2$$

ב. השלימו יחד את ההוכחה:

משום שאגף אחד במשוואה בהכרח זוגי, אזי...

$2n^2$ בהכרח זוגי ולכן אם נשמר את השוויון אז m^2 גם זוגי.

ולכן..

אם m^2 זוגי אז גם המספר עצמו m חייב להיות זוגי (כדי שריבוע של מספר יהיה זוגי).

ולכן..

אם m מתחלק ב-2, אז m^2 מתחלק ב-4.

ולכן..

אם אגף שמאל מתחלק ב-4, אז גם $2n^2$ צריך להתחלק ב-4 ולא רק ב-2, זאת אומרת ש- n גם זוגי (כי העלאת מספר אי-זוגי בריבוע נותנת מספר אי-זוגי גם כן).

הגענו לסתירה. הנחנו בהתחלה ש יש שני מספרים שלמים שהיחס ביניהם הוא שורש 2.

הגענו למסקנה ש: במקרה כזה שניהם חייבים להיות זוגיים.

זה יוצר סתירה עם: התנאים שיצרנו/של השאלה. הנחנו בהתחלה שאנחנו בוחרים m, n מספרים טבעיים זרים כך שהשבר הוא הכי מצומצם שניתן.

לכן, ההנחה שלנו אינה נכונה, זאת אומרת ש $\sqrt{2}$ אינו מספר רציונלי.

הידעתם?

לגיליונות נייר יש יחס של $\sqrt{2}$ בין אורכי צלעותיהם. כך יחס הצלעות נשמר בקיפול מדויק של הגיליון לשניים. לדוגמה, מידות דף A4 הן 210 על 297 מילימטרים – יחס מדויק עד הספרה הרביעית אחרי הנקודה העשרונית. סדרות הגיליונות בתקן זה מוגדרות כך שכל דף קצר פי $\sqrt{2}$ במידות האורך מקודמו בסדרה (A4 קצר פי $\sqrt{2}$ מ-A3), וכך תוצאת קיפול או חיתוך הגיליון לשניים מתקבלת במידותיו של הגיליון הבא בסדרה.

לסיכום, אתם מחזמנים לצפות בסרטון "ההיגיון במספרים אי-רציונליים", שמתאר את תהליך הגילוי של הפילוסוף היווני היפאסוס: <https://bit.ly/37yi0vM>.