

מנסים להוכיח: קיומם של מספרים אי-רציונליים

מטרות הפעילות

- לבנות בשיטתיות את מערכות המספרים העיקריות.
- לבנות הקשר בין אריתמטיקה ובין תחומי דעת אחרים.
- לפתח מיומנות של שימוש בהצגות שונות של מספרים בהתאם לנסיבות המתמטיות.

מושגים מתוכנית הלימודים

מספרים אי-רציונליים, בניית, משפט פיתגורס, מספרים רציונליים, מספרים ממשיים, הוכחות

מיומנויות

הבניית ידע, יישום ידע, פתרון בעיות וקבלת החלטות, רפלקטיביות לתהליך הלמידה

מה עושים?

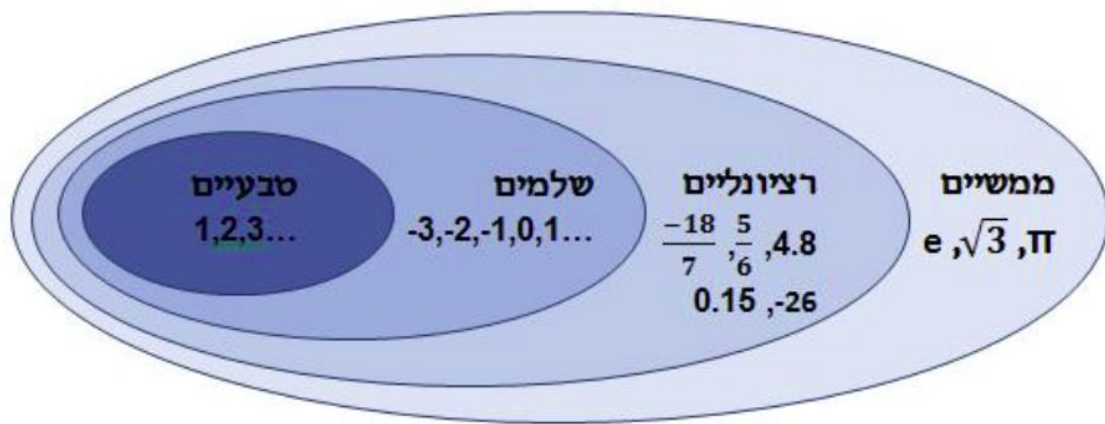
חלק א': הוכחה בדרך השלילה

לעיתים, במקום להוכיח טענה באופן ישיר, קל יותר להפריך את הטענה הנגדית לה. מהלך זה נקרא "הוכחה בדרך השלילה".

למשל, נרצה להוכיח שלא כל הכבשים בעולם בצבע לבן. דרך ההוכחה תהיה כך:

1. תחילה ננסח את מה שאנו רוצים לטעון, והוא שיש כבשים שהן לא בצבע לבן.
2. ננסח טענה נגדית. זו הטענה הנגדית: נשאר לנו להראות שמצאנו כבשה בצבע שחור (או כל צבע שאינו לבן); וכעת הטענה הנגדית שקרית. מכך נובע שהטענה המקורית היא טענת אמת.
3. כדי להשתמש בהוכחה בדרך השלילה, נבצע את השלבים הבאים:
 1. הניחו את הטענה שיש להוכיח (A) נכונה.
 2. נסחו טענה B, שנגדית לטענה
 3. הוכיחו כי טענה B שקרית וסותרת את תנאי השאלה, כללי המתמטיקה או ה"עולם" שמתואר בבעיה.
 4. מכיוון שהטענות נגדיות, אם B שקרית, אזי A טענת אמת. משמע: לא יכול להיות שטענה A לא נכונה.

יש לשים לב כי שיטה זו משתמשת בעיקרון שנקרא "השלישי הנמנע" בלוגיקה: או שטענה נכונה, או שאינה נכונה (אין אפשרות שלישית). מחזמים לקרוא עוד על הנושא בקישור הבא: <https://bit.ly/2FNfGWq>.



מתוך: אתר מכון דוידסון, "מספרים ושורשים אי-רציונליים": <https://bit.ly/38XFLYd>



נוכיח כעת כי קיימים מספרים אי-רציונליים על ידי כך שנראה ש- $\sqrt{2}$ אי-רציונלי:

טענה A תהיה: $\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.

טענה B תהיה: קיימים m ו- n שהם מספרים טבעיים זרים, כך ש: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. כלומר $\sqrt{2}$ הוא מספר: _____

נוכיח כי טענה _____ שקרית:

נניח כי קיימים m ו- n שהם מספרים טבעיים זרים, כך ש: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

א. נעלה כל אגף בריבוע. השלימו את אגפי המשוואה ופשטו את המשוואה כך שכל אגף יכיל משתנה אחר.

ב. השלימו יחד את ההוכחה:

משום שאגף אחד במשוואה בהכרח זוגי, אזי...

ולכן..

ולכן..

ולכן..

הגענו לסתירה. הנחנו בהתחלה ש_____

הגענו למסקנה ש:

זה יוצר סתירה עם:

לכן, ההנחה שלנו אינה נכונה, זאת אומרת ש $\sqrt{2}$ אינו מספר רציונלי.

הידעתם?

לגיליונות נייר יש יחס של $\sqrt{2}$ בין אורכי צלעותיהם. כך יחס הצלעות נשמר בקיפול מדויק של הגיליון לשניים. לדוגמה, מידות דף A4 הן 210 על 297 מילימטרים – יחס מדויק עד הספרה הרביעית אחרי הנקודה העשרונית. סדרות הגיליונות בתקן זה מוגדרות כך שכל דף קצר פי $\sqrt{2}$ במידות האורך מקודמו בסדרה (A4 קצר פי $\sqrt{2}$ מ-A3), וכך תוצאת קיפול או חיתוך הגיליון לשניים מתקבלת במידותיו של הגיליון הבא בסדרה.

לסיכום, אתם מחמנים לצפות בסרטון "ההיגיון במספרים אי-רציונליים", שמתאר את תהליך הגילוי של הפילוסוף היווני היפאסוס: <https://bit.ly/37yi0vM>.