نُبرمج وندرس: حركة الأجسام في الهواء

أهداف الفعاليّة

- فحص تأثير قوى ثابتة، مثل الجاذبيّة والقوّة الأفقية الثابتة، على حركة الأجسام.
- التعرُّف إلى برنامج ماكسيما الذي يقوم بعمليّات جبريّة مُركَّبة.
- استخدام برنامج ماكسيما بهدف دراسة حركة الأجسام في الهواء.

مصطلَحات من المَنْهَج التعليميّ

الحركة ذات التسارع الثابت، حقل الجاذبية، الحركة الباليستية، تسارع الجاذبية

مهارات

طرح الأسئلة، معالجة البيانات، تحليل البيانات واستخلاص الاستنتاجات، الإبداع، حل المشاكل واتخاذ القرارات، الانعكاسيّة في عملية التعلُّم، بناء المعلومات، تطبيق المعلومات

ماذا نفعل؟

لنبدأ...

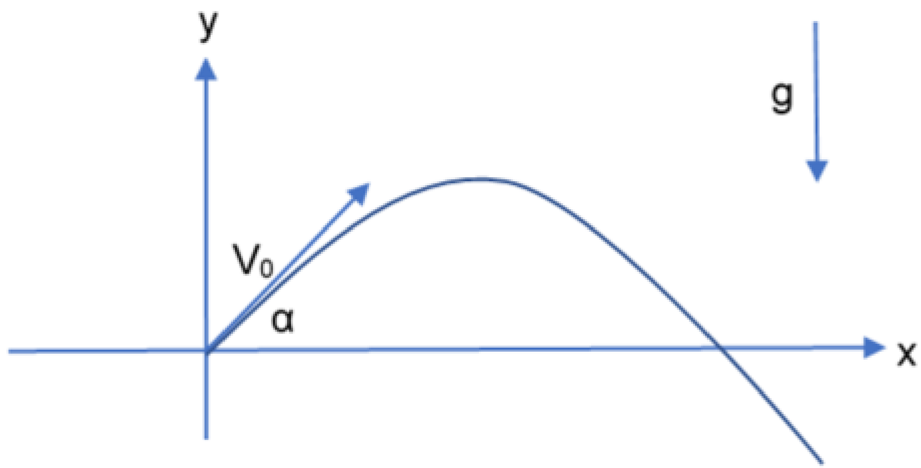
في كثيرٍ من الأحيان نُضطرّ إلى استخدام الحاسوب لحلّ مسائل فيزيائيّة مُعقَّدة. سنتعرف في هذه الفعالية على برنامج ماكسيما، الذي يتيح إجراء عمليات جبريّة عن تعابير رقميّة ورمزيّة (بارامتريّة). تثبيت البرنامج بسيط وتنزيله مُتاح مجّانًا.
لا تتطلّب الفعالية معرفة مسبقة في البرمجة. تُعطى المعلومات المطلوبة لتنفيذ الفعالية في الإرشادات.

سنوضح في هذه الفعالية كيف يمكن دراسة حركة أجسام في الهواء بالاستعانة بالحاسوب. سنُحاكي جسمًا يُرمى بسرعة ابتدائية مقدارها V_0، بزاوية رمي α (تُعرَّف الزاوية التي فوق الأفق على أنها موجبة، $\alpha>0$، الزاوية التي تحت الأفق على أنها سالبة، $\alpha<0$، والرمي الأفقي حين يكون: $\alpha=0$)، وسندرس مسار الجسم.

في المرحلة الأولى، نفترض أنّ الجِسم يتحرك بتأثير حقل جاذبية متجانس يمنح الأجسام تسارعًا ثابتًا. في هذه الحالة لا تعمل قوى خارجية في اتجاه المحور الموازي للأرض (محور x). في المحور المعامد للأرض (محور y) تتأثر الحركة بتسارع الجاذبية، g، فقط (الرسم التوضيحي "أ").

طوّرت الفعالية د. مايا دافيد هورفيتس

معهد دافيدسون الجناح التربوي لمعهد وايزمان للعلوم



الرسم التوضيحي "أ": الرمي بزاوية من فوق الأفق

على الجِسم في الرسم التوضيحي "أ" لا تعمل قوى خارجية في محور x، لذلك يتمّ التعبير عن المكان بدالّة الزمن، عن الحركة في محور x، بالتعبير التالي:

$$\Delta x = V_0 \cdot cos\alpha \cdot t$$

حيث يمثّل Δx الإزاحة الأفقية للجِسم.

في محور y، الوزن هو القوّة الوحيدة التي تؤثّر في حركة الجِسم، وهو يمنح تسارعًا g في الاتّجاه السالب. يتمّ التعبير عن المكان بدالّة الزمن، عن الحركة في محور y، بالتعبير التالي:

$$\Delta y = V_0 \bullet sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

لتلخيص المبادئ الفيزيائية، شاهِدوا الفيديو التالي: https://bit.ly/2tSRQP4.

الحلّ التحليليّ لمعادلة الحركة

يفتح النقرُ على شعار البرنامج مستنَدَ wxMaxima. هذا مستنَد ديناميكيّ يتيح إجراء الحسابات، دمج الرسوم البيانية والنصوص، وحتى البرمجة.

المستند مبنيّ من خلايا (cells). لكلّ خلية قوس أيسر معقوف يحدّها. لتنفيذ الأوامر المسجَّلة في الخلية، يجب وضع مُؤشِّر الفأرة على أي موضع في الخلية والضغط على SHIFT+ENTER.

1. (1) اكتبوا هذا السطر من الكود (يجب كتابة الإشارة * لإجراء عمليات الضرب في التعبير):

```
eq1:x=v0·cos(alpha)·t;
```

اضغطوا على SHIFT+ENTER من أجل فحص جواب الحاسوب:

```
(%i1)  eq1:x=v0·cos(alpha)·t;
```

(eq1) $x=\cos(alpha)\ t\ v0$

يعني ذلك أننا وضعنا داخل المتغيّر eq1 معادلة بارامترية تصف المكان كدالّة للزمن عن الحركة في محور x.

(2) نكرّر العملية للمكان كدالّة للزمن عن الحركة في محور y. لفعل ذلك، اكتبوا السطر التالي من الكود:

```
eq2:y=t·v0·sin(alpha)+ay·t^2/2;
```

اضغطوا على SHIFT+ENTER من أجل فحص جواب الحاسوب هذه المرّة.

(3) نستخدم الأمر solve ونستخرج متغيّر الزمن في المعادلة eq1:

```
(%i3)  solve(eq1,t);
```

(%o3) $[t=\frac{x}{\cos(alpha)\ v0}]$

(4) يضع الأمرُ ev التعبيرَ البارامتري للزمن الذي استخرجناه من المعادلة eq1 داخل المعادلة eq2:

```
(%i4)  eq3:ev(eq2,solve(eq1,t));
```

(eq3) $y=\frac{ay\ x^2}{2\cos(alpha)^2\ v0^2}+\frac{\sin(alpha)\ x}{\cos(alpha)}$

أي أنّ جواب الحاسوب يكون: المتغيّر eq3، الذي يحوي داخله معادلة. المتغيّر المستقلّ في المعادلة هو x والمتغيّر التابع هو y.

التعبير *y(X)* (أي y كدالّة لـ x) يمثّل معادلة مسار الجسم خلال طيرانه في الهواء. يمكننا أن نرى أنّ هذه دالّة تربيعية/ قطع مكافئ (y متعلّق بـ x وبـ x^2).

طوّرت الفعالية د. مايا دافيد هورفيتس

2. والآن سنتعلّم كيف يمكن الاستعانة بالبرنامج لبناء دالّة تضمّ جميع المراحل التي أجريناها في البند السابق.

انسخوا الكود التالي:

```
maslol(v0,alpha,ay):=block([eq1, eq2, eq3, y, x, t],
                           eq1:x=t·v0·cos(alpha),
                           eq2:y=t·v0·sin(alpha)+ay·t^2/2,
                           eq3:ev(eq2,solve(eq1,t)),
                           rhs(eq3)
    );
```

الدالّة maslol (اسم الدالّة يختاره المستخدِم) تستقبل السرعة الأولية للجِسم (V_0)، زاوية الإطلاق (α)، والتسارع العمودي للجِسم (a_y). عبر الأمر block ندمج كلّ أسطُر الكود التي تتكوّن منها الدالّة. نسجّل في السطر الأول بين قوسَين معقوفَين قائمة المتغيّرات المحليّة. حين يعطي المستخدِم الدالّة اسمًا، يُخصَّص مكان في ذاكرة الحاسوب لهذه المتغيّرات المحلية؛ وحين ينتهي تشغيل الدالّة ويُحسَب المُخرَج، تُحذَف هذه المتغيّرات.

يمثّل السطر الأخير في الدالّة مُخرَج الدالّة. في هذه الحالة، المُخرَج هو الطرف الأيمن من معادلة المسار.

في هذه المرحلة، من أجل إدخال الدالّة إلى ذاكرة الحاسوب، يجب الضغط على SHIFT+ENTER.

يمكننا الآن أن نستخدم الدالّة كما نريد. يمكن أن تستقبل الدالّة قيَمًا بارامتريّة، كما في الحالة التالية:

```
maslol(v0,α,−g);
```

افحصوا ماذا يكون جواب الحاسوب في هذه الحالة.

هناك إمكانية أخرى، هي أن نضع في الدالّة قيَمًا رقميّة، مثل:

```
maslol(10,%pi/6,−10);
```

لاحِظوا أنّ الخيار الافتراضي لماكسيما هو أنّ الزوايا تُحسَب بالراديان (الزاوية نصف القُطريّة). يمكن تعويض القيمة الرقميّة لـ π بواسطة pi%.

افحصوا جواب الحاسوب هذه المرّة أيضًا.

3. لحساب جذور معادلة المسار، اكتبوا سطر الكود التالي:

```
solve(maslol(v0,α,−g),x);
```


طوّرت الفعالية د. مايا دافيد هورفيتس

معهد دافيدسون الجناح التربوي لمعهد وايزمان للعلوم

(1) ما هو جواب الحاسوب؟

(2) من فحص جذور المعادلة، عن أية زاوية رمي α يتمّ الحصول على مدى أفقيّ مثاليّ (أي إزاحة أفقية قصوى)؟

4. (1) معطى: $v_0=10m/s,\ \alpha=30°$ و $a_y=-10m/s^2$. احسبوا المدى الأفقي بالاستعانة بالبرنامج.

(2) لرسم الرسم البياني لمعادلة المسار، اكتبوا سطر الكود التالي:

```
plot2d([maslol(10,%pi/6,−10)],[x,0,10],[y,−5,5]);
```

ضَعوا مؤشّر الفأرة على الموقع المناسب في الرسم البياني للتأكّد من أنّ المدى الأفقي الظاهر في الرسم البياني مطابق للذي حسبتموه في البند 4. (1).

5. نرسم على هيئة المحاور نفسها محاور لمعادلات مسار مختلفة، على النحو التالي:

```
plot2d([maslol(10,%pi/3,−10),maslol(10,%pi/4,−10),maslol(10,%pi/6,−10)],[x,0,10],[y,−10,10]);
```

لأيّ زاويتَي رمي نحصل على مدى أفقيّ متطابق؟ لماذا؟

معادلة المسار حين تعمل قوّة أفقيّة ثابتة على الجِسم

حين لا تعمل قوى خارجية في المحور x، يكون حساب معادلة المسار بسيطًا. في هذه الحالة، لدالّة المكان – الزمن للإزاحة الأفقيّة علاقة خطيّة بالزمن. لذا يمكن قياس متغير الزمن بسهولة، تعويضه في التعبير لدالّة المكان – الزمن للإزاحة العموديّة، وإيجاد تعبير تحليليّ (حلّ جبريّ دقيق) مقابل معادلة المسار.

في هذا الفصل، نفترض أنه طوال حركة الجسم في الهواء تهبّ ريح تمنح الجِسم تسارعًا ثابتًا، a_x، باتّجاه المحور x. في هذه الحالة، تكون دالّة المكان – الزمن للجِسم:

$$\Delta x = V_0 \cdot cos\alpha \cdot t + \frac{a_x \cdot t^2}{2}$$

الحركة في المحور y لا تتأثّر بالقوى التي تعمل على المحور x ولا تتغيّر.

في الوضع الحاليّ، دالّة المكان – الزمن للإزاحة الأفقية متعلّقة بتربيع الزمن. لذلك حين نعزل متغير الزمن نحصل على حلَّين. يمكن أن يكون الحلّ التحليليّ "مُعقَّدًا" وصعب التطبيق. في هذه الحالات، نفضّل أحيانًا اختيار طريقة حلّ رقميّة. نمثّل ذلك بالاستعانة بالمثال التالي:

1. **تستقبل الدالّة maslol2 السرعة الابتدائيّة، v_0، زاوية الرمي، α، التسارع بالمحور x, a_x، التسارع بالمحور y, a_y، وقيمة dt التي تمثّل "خطوات الزمن".**

```
maslol2(v0,ax,ay,alpha,dt):=block([x,y],
x:makelist(v0·cos(alpha)·dt·i+ax·(dt·i)^2/2,i,0,20),
y:makelist(v0·sin(alpha)·dt·i+ay·(dt·i)^2/2,i,0,20),
plot2d([discrete, x,y])
);
```

يُكوّن الأمر makelist متوالية أرقام. يمثّل كلّ حدّ في المتوالية إزاحة الجسم في اللحظة t=dt·i، إذ يمثّل المتغيّر i عددًا صحيحًا من مدى أعداد بدايته – في هذا المثال – في القيمة 0 ونهايته في القيمة 20.
تكوّن الدالّة الرسم البياني لمسار الجِسم.

انسخوا الدالّة maslol2 إلى مستنَد ماكسيما، واضغطوا على SHIFT+ENTER لرفع الدالّة إلى ذاكرة الحاسوب.

فعّلوا الدالّة maslol2 مع المعطيات التالية: $v_0=10m/s$, $\alpha=60°$, $a_x=-10m/s^2$, $a_y=-10m/s^2$ و $dt=0.1s$.
(1) كيف يبدو الرسم البياني للمسار؟

(2) افحصوا مسار حركة الجِسم عن معطيات أخرى حسب اختياركم.

طوّرت الفعالية د. مايا دافيد هورفيتس