

מגלים: פרקטלים על ציר המספרים

שכבת גיל

חטיבה עליונה

תקציר הפעילות

בפעילות זו התלמידים ילמדו על מושג הפרקטל דרך מדידה של קו החוף של ישראל, ודרך שימוש שונה מהרגיל בפונקציה ריבועית. העבודה היא בזוגות, לצד סיכום במליאה. הפעילות מתאימה הן להעשרה לגבי פרקטלים והן להעמקה במושג הגבול בהקשר של סדרת נקודות במישור.

משך הפעילות

שיעור אחד

מטרות הפעילות

- להעמיק את הבנת מושג הגבול.
- ללמוד על מושגים מרכזיים במתמטיקה מודרנית: פרקטלים ופונקציות איטרטיביות.

מושגים מתוכנית הלימודים

מספר ממשי, פונקציה, פונקציה מעריכית, סדרה הנדסית, גבול

מיומנויות

יצירתיות; הבניית ידע; יישום ידע; שיתוף פעולה; בניית טיעון

אופי הלמידה

זוגות, כיתתי

סוג הפעילות

פעילות לסיכום הנושא

- "Measuring Coastline – Numberphile": <http://bit.ly/2kwPlvG>

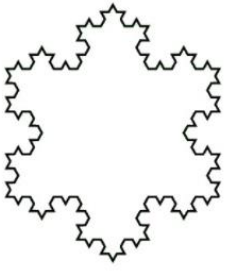
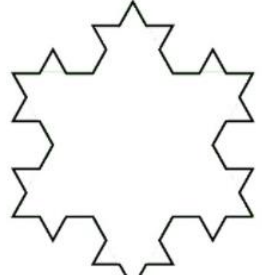
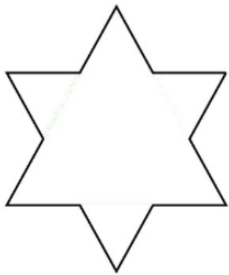
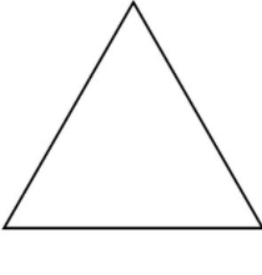
הכנות לקראת הפעילות

- לדאוג למחשב ומקרן להקרנת הסרטון.
- לדאוג לעותק של מפת קו החוף של ישראל עבור כל זוג תלמידים (אמורה להיות מפה כזו בכל כיתה, אך כדאי לשכפל עותקים לתלמידים כדי למנוע התגודדות).

מה עושים?

מומלץ לבקש מהתלמידים להתחלק לזוגות.

- א. מדדו את אורכו של קו החוף של ישראל. כיצד תיגשו למשימה?
מדידה בעזרת סרגל צפויה לתת קירוב בסיסי מאוד של הגודל האמיתי, מאחר שאנו מחברים קטעים ישרים. קירוב טוב יותר יכול להתבצע בעזרת חוט מדידה: נצמיד אותו למפה מפורטת ככל האפשר של קו החוף, ואז נמדוד. אם יש לתלמידים גישה לאינטרנט, סביר שחלקם יחפש תשובה וימצא שקו החוף משתנה באופן תדיר ולכן גם אורכו.
 - ב. צפו בסרטון העוסק במדידת קו החוף של אנגליה (<http://bit.ly/2kwPlvG>). האם, לדעתכם, אורך קו החוף כפי שאתם הייתם מודדים יהיה זהה לזה שנמלה הייתה מודדת? מדוע?
מידת הקירוב שמשיגה הנמלה טובה יותר מזו שלנו, ולכן התוצאה שהייתה מקבלת הייתה שונה משלנו - וככל הנראה ארוכה יותר.
- שאלת אורכו של קו החוף הייתה הבסיס להתפתחותם של "פרקטלים" (מלטינית - "שבור") - עצמים מתמטיים המורכבים מעותקים מוקטנים של עצמם. בסרטון מוצג פרקטל שמכונה גם "פתית השלג של קוך". תהליך הבנייה של פרקטל הוא רקורסיבי ומורכב מאין-סוף צעדים ושלבים. "השלב ההתחלתי" הוא הצורה המקורית שעליה מבוצע התהליך (במקרה של פתית השלג של קוך מדובר במשולש - ראו באיור).

			
n=3 צעד שלישי	n=2 צעד שני	n=1 צעד ראשון	n=0 שלב התחלתי

נראה כעת דוגמה לתהליך רקורסיבי נוסף, המסתמך על הפרבולה המוכרת והחביבה.

2. הציבו את הערך $x = 2$ בפונקציה $f(x) = x^2$. כעת הציבו את התוצאה בפונקציה. חזרו על כך שוב ושוב. א. מה תוכלו לומר על סדרת הערכים שקיבלתם?

מתקבלת סדרת הערכים $2, 4, 16, 256, \dots$. זו סדרה הנדסית שמנתה 2 ואיברה הראשון 2.

ב. סדרת ערכים זו נקראת המסלול של 2 תחת חזרה על הפונקציה $f(x) = x^2$. האם מסלול זה חסום או לא? סדרת הערכים גדלה באופן אין-סופי, לכן מסלול זה "בורח" לאין-סוף ואינו חסום.

ג. מצאו ערך x שעבורו המסלול תחת חזרה על הפונקציה $f(x) = x^2$ זהה למסלול של $x = 2$. עקב הסימטריה של הפונקציה f ביחס לציר ה- x , עבור $x = -2$ יתקבל מסלול זהה למסלול של $x = 2$.

3. א. מצאו ערך x שעבורו המסלול תחת חזרה על הפונקציה $f(x) = x^2$ הוא קבוע. ישנם שני ערכים שעבורם המסלול קבוע: עבור $x = 0$ נקבל את המסלול $0, 0, 0, \dots$, ועבור $x = 1$ נקבל את המסלול $1, 1, 1, \dots$.

ב. עבור אילו ערכים של x המסלולים "נמלטים" לאין-סוף? לפי תכונות הפונקציה הריבועית, עבור $|x| < 1$ סדרת הערכים תלך ותגדל לאינסוף.

ג. עבור אילו ערכים של x המסלולים "כלואים", וליד איזו נקודה במישור הם כלואים? עבור $-1 < x < 1$ סדרת הערכים תלך ותקטן, כלומר המסלול של הנקודות יילך ויתקרב לאפס (ראשית הצירים). עבור $x = \pm 1$ סדרת הערכים תהיה קבועה (כפי שראינו בסעיף א'), כלומר המסלול יהיה כלוא ליד הנק' $(1, 0)$.

4. נסו למצוא מסלולים משלושת הסוגים ("נמלטים", "כלואים", וקבועים) גם בפונקציות פולינום ממעלות שונות, פונקציות טריגונומטריות, ועוד.