

מגלים: פרקטלים על ציר המספרים

מטרות הפעילות

- להעמיק את הבנת מושג הגבול.
- ללמוד על מושגים מרכזיים במתמטיקה מודרנית: פרקטלים ופונקציות איטרטיביות.

מושגים מתוכנית הלימודים

מספר ממשי, פונקציה, פונקציה מעריכית, סדרה הנדסית, גבול

מיומנויות

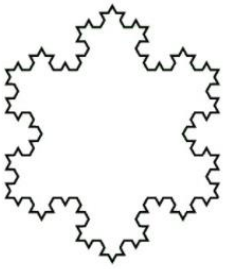
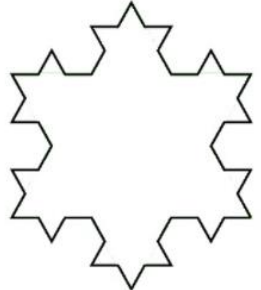
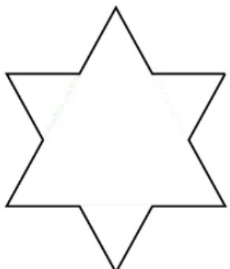
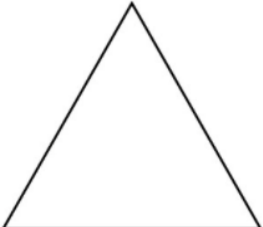
יצירתיות; הבניית ידע; יישום ידע; שיתוף פעולה; בניית טיעון

מה עושים?

1. א. מדדו את אורכו של קו החוף של ישראל. כיצד תיגשו למשימה?

ב. צפו בסרטון העוסק במדידת קו החוף של אנגליה (<http://bit.ly/2kwPlvG>). האם, לדעתכם, אורך קו החוף כפי שאתם הייתם מודדים יהיה זהה לזה שנמלה הייתה מודדת? מדוע?

שאלת אורכו של קו החוף הייתה הבסיס להתפתחותם של "פרקטלים" (מלטינית – "שבור"): עצמים מתמטיים המורכבים מעותקים מוקטנים של עצמם. בסרטון מוצג פרקטל שמכונה גם "פתית השלג של קוך". תהליך הבנייה של פרקטל הוא רקורסיבי ומורכב מאין-סוף צעדים ושלבים. "השלב ההתחלתי" הוא הצורה המקורית שעליה מבוצע התהליך (במקרה של פתית השלג של קוך מדובר במשולש – ראו באיור).

			
צעד שלישי $n=3$	צעד שני $n=2$	צעד ראשון $n=1$	שלב התחלתי $n=0$

נראה כעת דוגמה לתהליך רקורסיבי נוסף, המסתמך על הפרבולה המוכרת והחביבה.

2. הציבו את הערך $x = 2$ בפונקציה $f(x) = x^2$. כעת הציבו את התוצאה בפונקציה. חזרו על כך שוב ושוב.
א. מה תוכלו לומר על סדרת הערכים שקיבלתם?

ב. סדרת ערכים זו נקראת המסלול של 2 תחת חזרה על הפונקציה $f(x) = x^2$. האם מסלול זה חסום או לא?

ג. מצאו ערך x שעבורו המסלול תחת חזרה על הפונקציה $f(x) = x^2$ זהה למסלול של $x = 2$.

3. א. מצאו ערך x שעבורו המסלול תחת חזרה על הפונקציה $f(x) = x^2$ הוא קבוע.

ב. עבור אילו ערכים של x המסלולים "נמלטים" לאין-סוף?

ג. עבור אילו ערכים של x המסלולים "כלואים", וליד איזו נקודה במישור הם כלואים?

4. נסו למצוא מסלולים משלושת הסוגים ("נמלטים", "כלואים", וקבועים) גם בפונקציות פולינום ממעלות שונות, פונקציות טריגונומטריות, ועוד.