

מוצאים מקום מיטבי: מקסימום מוחלט

שכבת גיל

חטיבה עליונה – כיתות י"א, י"ב

תקציר הפעילות

התלמידים יצפו בסרטון קצר המתאר ניתוח בכלים של תורת המשחקים לשאלת המיקום האופטימלי של דוכן גלידה (נושא העשרה). לאחר הצפייה, נשתמש בכלים של חקירת פונקציות כדי לענות על שאלה דומה בתנאים מעט יותר מורכבים. הפעילות מתאימה לעבודה בזוגות. התלמידים ישתמשו באינטגרל כדי לבנות מודל מתמטי לרווח הצפוי, ויידרשו למצוא נקודת מקסימום מוחלט של הפונקציה הקדומה מתוך שיקולים כלליים ולא על ידי נגזרת. הפעילות כוללת רמזים שיקלו על התאמה לכיתה הטרוגנית.

משך הפעילות

שיעור אחד.

מטרות הפעילות

- לנתח את בעיית המקום המיטבי של דוכן הגלידה בכלים מתמטיים אנליטיים.
- להפעיל את הכלים של אינטגרל ופונקציה קדומה כדי למצוא מקסימום מוחלט.

מושגים מתוכנית הלימודים

אינטגרל, פונקציה קדומה, בעיות קיצון, פרמטרים

מיומנויות

טיפול במידע, יישום ידע, פתרון בעיות וקבלת החלטות, רפלקטיביות לתהליך הלמידה, שימוש בייצוגים שונים

אופי הלמידה

יחידים, זוגות

סוג הפעילות

פעילות להקניית הנושא

- "Why do competitors open their stores next to one another?" <https://bit.ly/3slhPoT>

הכנות לקראת הפעילות

- כהכנה לשיעור, יש לצפות עם התלמידים בסרטון או לצפות בבית בסרטון האינטראקטיבי "למקם דוכן גלידה": <https://bit.ly/3NSrN3i>

מה עושים?

1. צפו בסרטון המצורף על הדרך שבה תורת המשחקים מנתחת את המיקום האופטימלי לדוכני גלידה בחוף.
 2. כעת ננתח מצב דומה, אך מורכב יותר, בכלים של פונקציות.

בסרטון לא הייתה התייחסות לשאלת פיזור המתרחצים בחוף. נניח שרצועת החוף באורך קילומטר מתחילה ב- $x=0$ ומגיעה עד $x=1$. הפונקציה $f(x)$ מתארת את השתנות ערך (במונחי מכירת גלידה) בכל נקודה בחוף. למשל, מקום שבו יושבת משפחה עם הרבה ילדים קטנים יהיה בעל ערך גבוה, ומקום שבו יושב זוג שלא אוהב גלידה יהיה בעל ערך נמוך. לשם הפשטות, נניח שהפונקציה הזאת רציפה.
 3. שימו לב: אין לנו ביטוי אלגברי עבור הפונקציה הזו, או מידע על צורתה. אולם עדיין רק לפי הנתונים הללו אנחנו יכולים לדעת לגביה משהו. חשבו על הסעיפים השונים של חקירת הפונקציה: באיזה מהם אנחנו יכולים להסיק מסקנה גם על סמך מיעוט הנתונים שיש לנו?

תחום ההגדרה הוא בין 0 ל-1, ולפונקציה אין תחומי שליליות. היא גדולה או שווה מאפס בכל נקודה.
 4. בן הדוד שלכם כבר מיקם את דוכן הגלידה שלו בנקודה $x=a$. נניח שאתם צריכים למקם את הדוכן שלכם מימינו, בהמשך החוף, בנקודה $x=b$ כלשהי, כלומר $(b>a)$. מה הם כל ערכי x לאורך החוף שהרווח מהם יגיע אליכם? זכרו: כל אדם בחוף קונה גלידה מהדוכן הקרוב יותר אליו.

$\frac{a+b}{2} < x < 1$ אפשר להחליף את הסימן לקטן או שווה, זה לא מהותי בשאלה הזו.
 5. ניתן לחשוב על הרווח המצטבר לאורך רצועת חוף כעל השטח שמתחת לגרף הפונקציה $f(x)$. כתבו ביטוי מתמטי המתאר את סך כול הרווחים שלכם לאחר מיקום הדוכן.

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^1 f(x)$$

6. כתבו ביטוי לרווח מרצועת החוף במונחי הפונקציה הקדומה, $F(x)$. מה אפשר להסיק עליה מהתשובה שלכם לסעיף 3? אם נניח בנוסף לכך שהחוף לא ריק, האם תשובתכם תשתנה?

$$F(1) - F\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

- לפונקציה זו יש אותו תחום הגדרה, והיא פונקציה לא יורדת. אם החוף לא ריק, אז לפונקציה הקדומה יש גם תחומי עלייה של ממש. בנוסף לכך, מכיוון שערך ההתחלה הוא 0, הפונקציה הקדומה חיובית. זה שלב שבו

כדאי לוודא שלכל התלמידים יש את הביטוי הנכון לפונקציה הקדומה. אפשר לנהל את הדיון על התכונות שלה כדיון כיתתי, ואז לחזור לעבודה הפרטנית או בזוגות.

7. כעת נחשוב על השאלה כבעיית קיצון. אנחנו רוצים שהרווח שלנו מרצועת החוף יהיה מרבי. איזו נקודת קיצון אנחנו מחפשים, מקומית או מוחלטת? איזה מהנעלמים הוא פרמטר קבוע, ואיזה משתנה נתון לשליטתנו? מחפשים קיצון מוחלט בתחום ההגדרה. a הוא פרמטר קבוע, b הוא משתנה.

8. כעת ענו על השאלה: מה צריך להיות ערך המשתנה כדי לקבל רווח מקסימלי? ומה המשמעות של זה למיקום דוכן הגלידה שלכם? השלימו: הביטוי שאנו מחפשים את ערכו המקסימלי הוא:

הביטוי הוא:

$$F(1) - F\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

הפונקציה הקדומה אי-חיובית / אי-שלילית ולכן:

הוא מורכב מחלק קבוע $F(1)$ ומחלק שמושפע מהמשתנה: $-F\left(\frac{a+b}{2}\right)$. הפונקציה הקדומה אי-שלילית, ולכן

אנחנו רוצים שהרכיב $F\left(\frac{a+b}{2}\right)$ יהיה קטן ככל האפשר.

הפונקציה הקדומה לא עולה / לא יורדת ולכן:

הפונקציה הקדומה לא יורדת, ולכן אנחנו רוצים שהרכיב $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ יהיה גם כן קטן ככל האפשר.

המשתנה שלנו הוא a/b ואילו a/b הוא פרמטר קבוע. לכן נרצה ש a/b יהיה קטן / גדול ככל האפשר. ומכיוון שנתון כי $b > a$ נוכל להסיק שכדי להגדיל ככל האפשר את הרווח: b צריך להיות קרוב ככל האפשר ל- a .

9. מה הקשר בין התוצאה שקיבלתם כאן למסקנה בסרטון? הדוכן שלנו צריך להיות צמוד לדוכן של בן הדוד, בדיוק כמו בסרטון.