

מחלקים לקבוצות: תורת הקבוצות

שכבת גיל

חטיבת ביניים - כיתה ט'

חטיבה עליונה - כיתה י'

תקציר הפעילות

בפעילות זו התלמידים ייחשפו לנושא תורת הקבוצות וילמדו סימונים ומושגים עיקריים בתחום זה. הם יתחלקו לצוותים, ויבצעו משימה של חלוקת צורות שונות לקבוצות. משם ילמדו על דיאגרמות ון ועל יתרונותיהן. אופי הלמידה הוא בעיקר בצוותים.

משך הפעילות

שני שיעורים

מטרות הפעילות

- להגדיר קבוצה.
- להבחין בין סוגי הקבוצות: ריקה, חלקית ואוניברסלית.
- להבין את המושג יחס הכלה.
- להכיר את דיאגרמת ון.
- לבצע פעולות בין קבוצות: איחוד, חיתוך.

מושגים מתוכנית הלימודים

תורת הקבוצות: מושגים, סימונים, פעולות בין קבוצות, דיאגרמת ון

מיומנויות

טיפול במידע, רפלקטיביות לתהליך הלמידה, הבניית ידע, יישום ידע, שיתוף פעולה

אופי הלמידה

כיתתי, צוותים

סוג הפעילות

פעילות להקניית הנושא

קישורים לסרטונים

כל אחד מהסרטונים הבאים:

- "דיאגרמות ון – איחוד וחיתוך": <https://bit.ly/2uixqmc>
- "קבוצות – הגדרה": <https://bit.ly/2G5Rdlj>

הכנות לקראת הפעילות

- לדאוג למקורן לצפייה בסרטון במליאה.
- יש להדפיס מראש את [דפי הצורות](#) כמספר הצוותים בכיתה. גזרו כל דף כך שניתן יהיה למיין את הצורות לקבוצות.

מה עושים?

יש לחלק את הכיתה לשלוש קבוצות (ניתן גם יותר קבוצות אך יש צורך לעשות התאמות לפעילות).
הציגו בפני כל קבוצת תלמידים דף עם צורות גיאומטריות של צורות מעוגלות, ומצולעים בצבעים שונים ובדוגמאות שונות (קווים ונקודות).
בקשו מקבוצה אחת למיין לפי הצורות; מקבוצה שנייה למיין לפי הצבעים; ומקבוצה השלישית למיין גם לפי צורה וגם לפי צבע. רק חברי הקבוצה יודעים את מפתח המיון.
הנחו את הקבוצות להציג לכיתה את המיון שביצעה.

- התחלקו לקבוצות בהתאם להנחיית המורה.
- קבלו מהמורה דף עם צורות ועיינו בו בקבוצה. עליכם למיין את הצורות שבכרטיסייה בהתאם לקריטריון שתקבלו מהמורה.
- הציגו את המיון שערכתם לחברי הכיתה.

כעת קראו ביחד את ההגדרה המתמטית למושג "קבוצה".
"קבוצה" במתמטיקה היא אוסף מוגדר היטב של עצמים, שכל אחד מהם נקרא "איבר בקבוצה".
ברור לחלוטין מי שייך לקבוצה ומי אינו שייך לקבוצה.
 $a \in A$ הוא סימן שייכות. לדוגמה: אם a שייך ל- A , נסמן זאת כך: $a \in A$

- לא חייבת להיות תכונה משותפת לאיברי הקבוצה.
- סדר האיברים בקבוצה חסר משמעות.
- מספר הפעמים שבהן נרשם איבר בקבוצה אינו משנה את הקבוצה.
- סימון קבוצה: באמצעות סוגריים מסולסלים שביניהם נרשמים איברי הקבוצה.
- מקובל לסמן קבוצות בעזרת אותיות לטיניות גדולות: {ריבוע, משולש, מלבן} $A =$
- מקובל לסמן איברים בעזרת אותיות לטיניות קטנות: $A = \{d, a, b, g, f\}$

מתוך השיבוצים יש לעורר דיון שבסופו ילמדו המושגים והסימונים הבאים:

מושגים וסימונים בתורת הקבוצות

שוויון בין שתי קבוצות: שתי קבוצות הן שוות אם הן מכילות בדיוק אותם איברים, כשסדר האיברים לא משנה. למשל, האם כל איבר של קבוצה A הוא גם איבר של קבוצה B, וכל איבר של קבוצה B הוא גם איבר של קבוצה A? התשובה היא לא. הראו לתלמידים שאם הקבוצות כן היו שוות היינו מבצעים סימון כזה: $B = A$. ניתן להגדיר שתי קבוצות חדשות שכן שוות אחת לשנייה.

במקרה שלנו ניתן לראות כי קבוצה A וגם קבוצה B אמורות להכיל את כל הכרטיסיות שבכיתה. אלא אם כן הוגדר בכיתה שקווים ונקודות גם נחשבים צורות גיאומטריות.

קבוצה ריקה: קבוצה שאין לה איברים. לדוגמה: $D = \{\text{בעלי חיים}\}$ הכוונה מתוך הצורות שחולקו בכיתה. הסימון: $\emptyset$ או $\{\}$

קבוצה חלקית - ממש: קבוצה E היא חלקית/תת קבוצה לקבוצה A אם כל איבר של E הוא גם איבר של A אך לא כל איבר של A הוא גם איבר של E.

במקרה זה ניתן לומר כי הקבוצות מקיימות ביניהן **יחסי הכלה**, כלומר, שקבוצה אחת מכילה בתוכה את כל איברי הקבוצה החלקית אבל הקבוצות אינן זהות. הסימון: $A \subset E$

קבוצה אוניברסלית: קבוצה המכילה את כל האיברים שבהם דנים. היא מסומנת בסימן Ω , ומייצגת את עולם התוכן, כל האיברים הרלוונטיים לדיון מסוים. לדוגמה: $\Omega = \{\text{כרטיסיות}\}$.

שאלו האם ניתן להציג את המידע הקונקרטי שעל הלוח ולתארו כתכונה של קבוצות בצורה ציורית, בהירה ומופשטת יותר מאשר הכרטיסיות שמדבקות על הלוח?

הציגו לתלמידים את השימוש בדיאגרמת ון, והסבירו שהיתרון בדיאגרמות האלו הוא בבהירות ההצגה שלהן. הדיאגרמות האלו מפשטות את תהליך ההשוואה. אין טיפול בקריטריונים להשוואה, אלא רק בתכונות. יתרון נוסף הוא באפשרות להציג את דיאגרמת ון גם עבור שלוש קבוצות מושוות, ולמצוא דברים משותפים לשלושתן, וכן למצוא דברים משותפים לזוג קבוצות מתוך השלוש.

צפו בסרטון הבא בנושא דיאגרמות ון: <https://bit.ly/2sCyEs2>.

שימו לב לקושי המתגלה בתהליך הכנת הדיאגרמה בחלק החופף. קשה לתכנן מראש מה יהיה גודלו, ויש הנוטים לשייך לגודל גם את משמעות היקף החפיפה בין התכונות (ככל שהוא גדול יותר, כך החפיפה גדולה יותר), ופה ישנה הטיה בגלל קנה מידה גרפי.

האם אפשר למצוא בקבוצה אחת איברים השייכים גם לקבוצה אחרת, וליצור מהם קבוצה חדשה בעלת תכונות המשותפות רק להם? למשל, מצולעים וצורות מעוגלות בצבע ירוק עם נקודות.



האם אפשר ליצור קבוצה חדשה המכילה את כל האיברים של הקבוצה הראשונה ואת כל האיברים של הקבוצה השנייה? למשל, קבוצת המשולשים תאחד עם קבוצת המרובעים ותהיה קבוצת המצולעים.

הסבר: אפשר לבצע פעולות על קבוצות בדומה לפעולות על מספרים, כגון חיבור וחיסור. הפעולות הבסיסיות ביותר הן פעולות החיתוך והאיחוד. תוצאות האיחוד והחיתוך של קבוצות הן קבוצות. חיתוך שתי קבוצות יוצר התייחסות לקבוצה חדשה, שמכילה את כל האיברים של הקבוצה הראשונה – שהם גם איברים של הקבוצה השנייה. במילים אחרות, איבר נמצא בקבוצת החיתוך אם הוא נמצא גם ב-A וגם ב-B.

חיתוך מסומן באופן הבא: $C = A \cap B$

חיתוך של קבוצות שמוכלות אחת בשנייה הוא תמיד הקבוצה ה"קטנה" יותר (המוכלת). לעומת זאת, איחוד שתי קבוצות יוצר התייחסות לקבוצה חדשה, שמכילה את כל האיברים של הקבוצה הראשונה ואת כל האיברים של הקבוצה השנייה. כלומר איבר נמצא בקבוצת האיחוד של כמה קבוצות אם הוא נמצא או בקבוצה הראשונה, או בשנייה וכו', או בכלן.

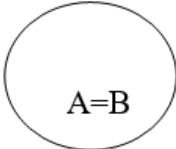
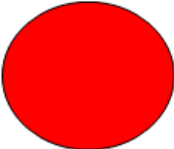
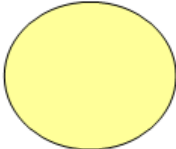
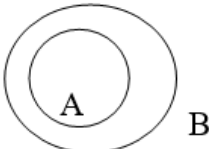
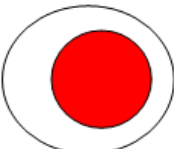
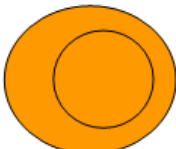
איחוד מסומן באופן הבא: $C = A \cup B$

איחוד של קבוצות שמוכלות אחת בשנייה הוא תמיד הקבוצה ה"גדולה" יותר (המכילה).

לסיכום עליכם לבנות טבלה מסכמת של חיתוך ואיחוד קבוצות תוך כדי שימוש בדיאגרמת ון.

מצב הקבוצות	תיאור בעזרת דיאגרמה	חיתוך	איחוד	דוגמה
קבוצות שוות				
קבוצות חלקיות				

אם יש קושי, אפשר להציג לתלמידים דוגמה לפתרון הטבלה.

שם	תאור בעזרת דיאגרמה	חיתוך	איחוד	דוגמא
קבוצות שוות	 $A=B$	 $C = A \cap B$	 $C = A \cup B$	$A=\{2,4,6,8\}$ $B=\{2,6,4,8\}$
קבוצות חלקיות	 A B	 $C=\{2,4\}$	 $C=\{2,6,4,8\}$	$B=\{2,4,6,8\}$ $A=\{2,4\}$

