

עולים ויורדים קומות: חזקות עם מעריכים 0,1 ומעריכים שליליים

שכבת גיל

חטיבת ביניים – כיתה ט'

תקציר הפעילות

בפעילות זו התלמידים ילמדו תחילה את כללי החזקות בדרך ייחודית: בנייני מגורים שבהם "מתגוררות" חזקות בקומות השונות. לאחר מכן, יתנסו התלמידים בחילוק וכפל חזקות, ויבססו את הידע והמיומנויות שלהם בתחום זה. לבסוף יעסקו בחזקות בעלות מעריכים אפס ומעריכים שליליים. הפעילות מתאימה לעבודה בזוגות.

משך הפעילות

שיעור אחד - שניים

מטרות הפעילות

- לחזק את ההבנה של משמעות החזקה, בסיס, ומעריך של חזקה.
- להשתמש בכתיב חזקות לקיצור פעולת כפל חזרת (מעריך טבעי).
- לתרגל תרגילי חזקה הכוללים מעריכים מיוחדים (0,1 ושלילי).

מושגים מתוכנית הלימודים

חזקות, מעריך, בסיס, מספרים שליליים, מעריך שלילי, שברים

מיומנויות

הבניית ידע, יישום ידע, שיתוף פעולה

אופי הלמידה

זוגות

סוג הפעילות

פעילות להקניית הנושא

קישור לסרטון

· "טרום אלגברה – המעריכים אחד, אפס ומעריכים שליליים": <https://bit.ly/2ExyJAr>

הכנות לקראת הפעילות

- לדאוג למקורן לצפייה של הסרטון במליאה.
- לדאוג לדפי משימה לתלמיד כמספר התלמידים בכיתה.

מה עושים?

חלק א': היכרות עם דיירי הבניינים

התחילו את הפעילות בהקראת סיפור המסגרת.



תמונה להמחשה: בסיס חיל האוויר האמריקני, רמשטיין, גרמניה

בבניינים מיוחדים גרו להן חזקות שונות: החזקות הן דיירי הבניין. אלה דיירים מיוחדים, שאפשר לכפול ולחלק אותם בדיירים אחרים מאותו הבניין. ישנם חמישה בניינים, ובכל אחד מהם יש קומת כניסה וחמש קומות מגורים. בטבלה מטה אפשר לראות את הבניינים 2-5 (בלי בניין 1). בבניין 1 והדיירים שבו תעסקו בהמשך הפעילות. ככלל, המעריכים והבסיסים של החזקות בפעילות זו הם מספרים שלמים.

השלימו את שם החזקה ש"גרה" בדירה לפי החוקיות שבטבלה.

קומה ה	5^5	4^5	3^5	2^5
קומה ד	5^4	4^4	3^4	2^4
קומה ג	5^3	4^3	3^3	2^3
קומה ב	5^2	4^2	3^2	2^2
קומה א	5^1	4^1	3^1	2^1
קומת כניסה				
	בניין 5	בניין 4	בניין 3	בניין 2

חלק ב': מגלים כללי חזקות

התבוננו בבניין 5.

בבניין זה גרות חזקות שבסיסן 5. למשל, לדייר שגר בקומה א' קוראים 5^1 . כדי לעבור בין הקומות השונות בבניין שלהם, דיירים יכולים לבצע פעולות כפל וחילוק. אפשר להראות לתלמידים כמה דוגמאות לתזכורת לפני כתיבת הנוסחה.

1. אם הדייר שנמצא בקומה ג' רוצה לעלות לקומה ד' מה עליו לעשות? כתבו תרגיל מתאים.
עליו להיות מוכפל במספר 5: $5^3 \cdot 5$, וכך נקבל 5^4 .
2. אם הדייר שנמצא בקומה ב' רוצה לעלות לקומה ה', מה עליו לעשות?
עליו להיות מוכפל במספר 5 שלוש פעמים: $5^3 \cdot 5^2$ וכך נקבל 5^5 .
3. אם הדייר שנמצא בקומה ד' רוצה לרדת לקומה א', מה עליו לעשות?
עליו להיות מחולק במספר 5 שלוש פעמים: $\frac{5^4}{5^3} = 5$

התבוננו בתשובות שכתבתם לשאלות 1, 2. תארו את החוקיות בין המעריכים של מכפלת החזקות ובין המעריך בתוצאת המכפלה.

המעריך בתוצאה הוא סכום המעריכים במכפלה.

כתבו את הכלל:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, כאשר a הוא מספר רציונלי ו- n, m מספרים טבעיים.

כעת התבוננו בדיירים שגרים בקומה הראשונה בבניינים השונים. מה משותף לכל הדיירים האלו? לכל הדיירים מעריך החזקה הוא 1.

אפשר לראות זאת גם על ידי צמצום מספרים מהמונה ומהמכנה בדוגמה הבאה:
נתבונן למשל בבניין מספר 4. נבחר את הדייר שגר בקומה ה' ונחלק אותו בדייר שגר בקומה ד'.

$$\frac{4^5}{4^4} = \frac{4 * 4 * 4 * 4 * 4}{4 * 4 * 4 * 4} = 4^1 = 4$$

כתבו כמה אפשרויות, שבהן דייר מסוים חלקי דייר באותו בניין יניב את הדייר שמופיע בקומה 1. הראו את צמצום הכפולות.

על התלמיד לחלק קומה הגדולה ב-1 מקומה אחרת. למשל בבניין 3 קומה 5 חלקי קומה 4.

האם אתם שמים לב לחוקיות מסוימת? תארו את החוקיות.
אין זה משנה איזה בניין נבחר. העיקר שנחלק קומה שגדולה ב-1 מקומה אחרת, ונקבל את התוצאה שמופיע בקומה 1.

צפו כעת בסרטון עד הדקה 1:34 <https://bit.ly/2ExyJAr>.

אפשר להראות לתלמידים עוד כמה דוגמאות לתזכורת לפני כתיבת הנוסחה.
מסמנים זאת כך:

$a^m : a^n = a^{m-n}$, כאשר a הוא מספר רציונלי ו- m, n מספרים טבעיים.

חלק ג': כללים ומקרים מיוחדים

בחלק זה תחקרו מצבים מיוחדים: למשל, מה יקרה אם נחלק קומה בעצמה.
ניקח לדוגמה את בניין 2 קומה ג':
מצד אחד, לפי הכלל שראינו כעת:

$$\frac{2^3}{2^3} = 2^{3-3} = 2^0$$

ומן הצד השני, כשנחלק מספר בעצמו (למעט 0) מתקבל 1:

$$\frac{2^3}{2^3} = 1$$

פירוט השלבים:

$$\frac{2^3}{2^3} = \frac{2 * 2 * 2}{2 * 2 * 2} = 2^0 = 1$$

מכאן נוכל להסיק כי $2^0 = 1$.

הציעו דוגמה משלכם:

בניין _____ קומה _____

בצעו פעולת חילוק של המספר שבחרתם בעצמו, ופרטו את שלבי הפתרון: _____

כעת מלאו את המשבצות בקומת הכניסה בטבלה בתחילת הפעילות.

נגיע להכללה: $a^0=1$ כאשר $a \neq 0$

אפשר להראות בסרטון את הבעייתיות של 0 בחזקת 0, ומדוע הוא אינו מוגדר. נוכל גם להסביר זאת כך: אם מגיעים לביטוי 0^0 , אזי הדבר יכול היה לנבוע מ- $\frac{0^n}{0^n}$. 0 כבסיס במכנה של השבר הוא אינו מוגדר. למשל $\frac{0^5}{0^5}$ אינו מוגדר, מכיוון שסותר שני כללי חזקות: באחד התוצאה אינה מוגדרת (המכנה הוא 0 ולכן ערך המנה אינו מוגדר), ובשני התוצאה היא 1 (לפי הכלל שהובא כעת).

ישנם תחומים במתמטיקה, כגון קומבינטוריקה ותורת הקבוצות, שבהם 0^0 כן מוגדר ושווה ל-1.

תוכלו לקרוא עוד בקישור הבא: <https://bit.ly/2OwDvVX>.

כעת נעבור לחילוק של קומות נמוכות בקומות גבוהות יותר.

אם ניקח לדוגמה את בניין 3, ונחלק את קומה 2 בקומה 5, כיצד ייראה תרגיל החילוק? $\frac{3^2}{3^5}$

על פי הכלל חזקות של חיסור המעריכים, במקרה של חילוק חזקות נקבל את הביטוי הבא: $2^2-5 = 3^{-3}$.

נתבונן שוב בשבר, $\frac{3^2}{3^5}$ ונרשום אותו ככפולות של אותו גורם: $\frac{3*3}{3*3*3*3*3}$. לאחר צמצום הגורמים נקבל שבר שהמונה שלו הוא 1. ומכאן נקבל $\frac{1}{3^3}$.

כדאי לקיים דיון בנוגע לצמצום שברים, ולהסביר מדוע כשמצמצמים את המכנה או את המונה לחלוטין לא מתקבל 0 למשל, אלא 1. הדבר נובע מחלוקה של מספר בעצמו, שמניבה את התוצאה 1 ולא 0. לדוגמה:

$$\frac{5 * 5 * 5}{5} = \frac{5}{5} * 5 * 5 = 1 * 5 * 5 = 5^2$$

כתבו דוגמה משלכם:

בבניין _____ נחלק את קומה _____ בקומה _____.

רשמו את התרגיל כשבר:

כתבו את התרגיל בכתיב חזקות כחזקה אחת, כשהמעריך הוא הפרש המעריכים של המונה מהמכנה:

כיצד נוכל לכתוב חזקה זו כשבר שבו המונה הוא 1?

נגיע להכללה $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$: כאשר $a \neq 0$

בניין 1 המיוחד

כזכור לא עסקתם בבניין 1. עיינו בטבלה שבחלק א' על מנת להיזכר בדיירים השונים. מילאו את המשבצות כך שיתאימו לבניין 1:

	קומה ה
	קומה ד
	קומה ג
	קומה ב
	קומה א
	קומת כניסה

כעת הציעו דוגמאות שמיישמות את הכללים השונים שראינו לאורך הפעילות לגבי בסיס 1. השוו עם חבריכם לכיתה וכתבו מה משותף בתוצאות שמתקבלות.

כללי החזקות תקפים גם על בסיס 1 באותו אופן. נרצה שבהסבר של התלמידים תודגש הייחודיות של המספר 1: אין זה משנה מה הוא המעריך – אם הוא 1, 0 או שלילי – בכל המקרים השונים תוצאת החזקה היא 1. למשל, אם ניקח בבניין 1 ונחלק את קומה 2 בקומה 5, יתקבל: $\frac{1^2}{1^5} = 1$.

מהי תוצאת המכפלה של כלל החזקות הנמצאות בקומות הכניסה של כל הבניינים? הסבירו. תוצאת המכפלה היא 1, מכיוון שכל החזקות בקומת הכניסה ערכן 1. מכאן מתקבל: $1=1*1*1*1*1$.

הרחבה: אם נותר זמן, או שברצונכם לתת כמשימה לבית, אפשר הרחיב את הפעילות ולשאל שאלות מגוונות שונות על "קומות מרתף". אפשר לתת לתלמידים לחבר בעצמם שאלות על קומות אלו ולענות עליהן.