

משחקים שחמט: חזקות

מטרות הפעילות

- להקנות ראייה מתמטית מרחבית.
- להבין את משמעות החזקה, בסיס, מעריך של חזקה.
- להשתמש בכתיב חזקות לקיצור פעולת כפל חוזרת (מעריך טבעי).
- לחזק את ההבנה של הגדרת החזקה.

מושגים מתוכנית הלימודים

חזקות, מעריך טבעי, גידול מעריכי

מיומנויות

שאלת שאלות, עיבוד נתונים, ניתוח נתונים והסקת מסקנות, הבניית ידע, יישום ידע, רישום תצפיות

מה עושים?



נלקח מ: shutterstock

שחמט והקשר הישראלי

בוריס אברמוביץ' גלפנד נולד ב-1968 במינסק שבבלרוס (אז ברית המועצות), ועלה לארץ בשנת 1998. הוא שחמטאי ישראלי בדרגת רב-אמן בין-לאומי, סגן אלוף העולם בשחמט לשעבר וחבר נבחרת ישראל. בשנת 1992 דורג גלפנד במקום השלישי בעולם, אחרי אלופי העולם גארי קספרוב ואנטולי קרפוב. במאי 2012 התמודד נגד ההודי וישוואנתן אנאנד באליפות העולם בשחמט, ונוצח בשלב שובר השוויון במשחקים מהירים. גלפנד זכה באליפות זו בפרס ניחומים בסך מיליון דולר. גלפנד הוא מרבי האמנים הגדולים בעולם בשני העשורים האחרונים, וגדול שחמטאי ישראל בכל הזמנים. אפשר לקרוא עוד על אודותיו בקישור הבא: <https://bit.ly/2SeNfFJ>.

התחלקו לקבוצות לפי הנחיית המורה.
קראו בקבוצתכם את סיפור האגדה ולאחר מכן ענו על השאלות.

האגדה על המלך שחמטון וגרגירי האורז



איור: shutterstock

לפני שנים רבות, בממלכה רחוקה וירוקה, היה המלך שחמטון מקבל בארמונו מבקרים. המלך, שהיה ידוע כשחקן שחמט מעולה, אהב לאתגר את אורחיו במשחק השחמט. עם הזמן ידעו המבקרים שאין טעם לשחק מול שחמטון, מכיוון שהמלך ניצח תמיד. וכך, במשך חודשים ארוכים, כבר לא קיבל המלך אורחים ולא שיחק מאחר שלא רצו לשחק מולו. והנה, יום אחד הגיע לארמון האביר בוריס איש בלרוס, והמלך הציע לו להתחרות. על מנת לפתות אותו לשחק, הציע שחמטון לתת לאביר כל פרס שיחפוץ בו אם ינצח את המלך. לאחר שהתחרו במשחק צמוד מאוד, הצליח בוריס לנצח את המלך. המלך המופתע והמאוכזב שאל אותו: "ניצחת! כעת אמור לי מה רצונך?" והאביר השיב: "אורז!" "מה?" שאל המלך בפליאה. בוריס איש בלרוס ביקש מהמלך שיניח על המשבצת הראשונה בלוח גרגיר אורז אחד, על השנייה 2, על השלישית 4, ועל הרביעית 8. "כעת", אמר האביר למלך, "מכיוון שאין לך מקום על המשבצת עצמה, עליך להמשיך בעל פה או לכתוב על דף את כמות הגרגירים על פי אותה חוקיות, עד שנגיע לכמות הגרגירים במשבצת האחרונה בלוח – חזו הכמות שאני רוצה."

לאחר שהמלך התחיל בחישובים, הבין שהוא בבעיה חמורה... נסו לעזור לו:

כמה גרגירים במשבצת הראשונה? _____

במשבצת השנייה? _____

ובמשבצת השלישית? _____

וברביעית? _____

כעת כתבו זאת בכתב חזקות:

במשבצת החמישית? _____

במשבצת התשיעית? _____

במשבצת ה-32? _____

כמה גרגירים יתקבלו אם נחבר את כל הגרגירים יחד מסך כול 32 המשבצות? מספר עצום!!!

בואו נתבונן בכמויות לפי משקלים: במשבצות הראשונות, תגדל הכמות לקילוגרם אורז במשבצת ה-15; לטון אורז במשבצת ה-25; ל-1,000 טון במשבצת ה-35 וכך הלאה. במשבצת ה-55 יונח כל יבול האורז השנתי של העולם כולו, ובמשבצת האחרונה תצטרך להיות כמות אורז שהיא גדולה מכל האורז שגדל אי פעם בתולדות האדם!

כעת נבין כמה עקרונות על הפעולות החשבוניות שאפשר לבצע על חזקות.

- התבוננו בלוח שחמט בשורה הראשונה:



- רשמו על כל משבצת את כמות הגרגירים בכתב חזקות.
- מלאו את המשבצות משמאל לימין, ממשבצת א' לב' וכך הלאה.

- o התבוננו במשבצת ו'1: מהי החזקה שמופיע במשבצת זו? _____
 o וכמה גרגירים מתקבלים? _____
 o אם נכפול את החזקות (כלומר מספר הגרגירים אחד בשני), באילו שתי משבצות שונות נקבל 32
 כמספר הגרגירים? כתבו את כל האפשרויות:
 o כתבו זאת בכתיב חזקות: _____

- מהו הדפוס שאפשר לזהות?
 - את הדפוס מסמנים כך: $a^n * a^m = a^{n+m}$
 - במקרים השונים הבסיס הזהה הוא _____, אבל המעריכים יכולים להיות כל מספר.
 - מכפלה בין שני ביטויים עם חזקות, כשבסיסי החזקות שווים, ניתנת לכתיבה כביטוי יחיד עם אות הבסיס ומעריך שהוא סכום המעריכים של החזקות.
- כתבו דוגמה נוספת עם בסיס השונה מ-2 _____

מה לגבי חיבור חזקות?

- התבוננו שוב בלוח שחמט, וחשבו את התוצאה של התרגיל.
מהי התוצאה? _____
שימו לב שמספר זה אינו מופיע בלוח, כלומר הוא אינו תוצאה של פעולת חזקה עם בסיס 2 (זאת במידה והמעריך טבעי).
נוכל לראות זאת גם על ידי כתיבה $2^3 + 2^2 = 2^3 + 2 \cdot 2 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 2^3 + 2^2$
מהי הפעולה יוצאת הדופן בשרשרת? _____
פעולת החיבור "שוברת" את שרשרת המכפלות ולכן לא מהווה קיצור של פעולת חזקה.
האם שני הביטויים הבאים שווים? _____
ביטוי 1: $5^6 + 5^3$
ביטוי 2: $5^6 \cdot 5^3$
- איזה מבין הביטויים אפשר לכתוב בתור 5^9 באופן כזה שייכתב כבסיס עם מעריך? _____
 $5^6 \cdot 5^3 = 5^9$
מבט נוסף: $5^6 \cdot 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^9$

זכרו:

בכל הדוגמאות שנראה בפעילות זו, החזקה היא פעולה מקוצרת של מכפלה שבה מופיע אותו גורם מספר פעמים.

- חזרו אל השורה הראשונה שחקרתם בלוח השחמט.
התבוננו במשבצת ד' 1 : מהי החזקה שמופיע במשבצת זו? _____
וכמה גרגירים מתקבלים? _____
 - בשורה הראשונה, במידה ונחלק את החזקות המופיעות בהן (מספר הגרגירים) באילו שתי משבצות שונות יתקבל 8? רשמו את כל האפשרויות: _____
 - כתבו את כל האפשרויות בכתב חזקות: _____
 - האם אתם רואים באפשרויות הללו חוקיות? _____
 - לאיזו הכללה אפשר להגיע? _____
מסמנים זאת כך: $a^m : a^n = a^{m-n}$
- בשני המקרים הבסיס זהה והוא _____, אבל המעריכים יכולים להיות כל מספר.

מנה של שתי חזקות בעלות אותו בסיס שווה לחזקה בעלת אותו בסיס, שהמעריך שלה שווה להפרש המעריכים (ובפרט, להפרש בין המעריך החזקה שבמונה למעריך החזקה שבמכנה).
כתבו דוגמה נוספת עם בסיס השונה מ-2.

מה לגבי חיסור חזקות?

- התבוננו שוב בלוח השחמט וחשבו את התוצאה של הביטוי הבא: $2^3 - 2^1$.
6 אינו מופיע בלוח, כלומר הוא אינו תוצאה של פעולת חזקה עם בסיס 2.
נוכל לראות זאת גם על ידי כתיבה $2^3 - 2^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2$
האם יש פעולה יוצאת דופן? _____
- פעולת החיסור "שוברת" את שרשרת המכפלות ולכן לא מהווה קיצור של פעולת חזקה.
האם שני הביטויים הבאים שווים? _____
ביטוי 1: $5^6 - 5^3$
ביטוי 2: $5^6 : 5^3$
איזה מבין הביטויים אפשר לכתוב באופן כזה שייכתב כבסיס עם מעריך? _____
נוכל לראות הסבר נוסף לכלל חזקות זה על ידי צמצום מספרים מהמונה ומהמכנה בדוגמה הבאה:

$$\frac{4^5}{4^3} = \frac{4 * 4 * 4 * 4 * 4}{4 * 4 * 4} = 4 * 4 = 4^2$$

הציעו דוגמה נוספת המראה את התהליך כפי שהודגם קודם:

לסיכום הפעילות, צפו בסרטון "טרום אלגברה – חזקות" שבקישור הבא: <https://bit.ly/2OzsLot>