

חוקרים וממציאים: תכונות מספרים ופעולות חשבון

שכבת גיל

חטיבת ביניים - כיתות ז' – ט'

תקציר הפעילות

פעילות זו עוסקת בחקירת תכונותיהן של פעולות מומצאות, ומטרתה לעסוק בקשר שבין פעולות החשבון לתכונות המספרים. הפעילות מתבצעת בזוגות. כל זוג תלמידים חוקר את הפעולות החדשות, מבקר את ממצאיו ולאחר מכן יוצר בעצמו פעולות חדשות.

משך הפעילות

שני שיעורים

מטרות הפעילות

- להבין מהי חשיבות סדר פעולות החשבון וחוקי החשבון.
- ליישם ידע בדרך מעניינת ומסקרנת כדרך להגברת ההנאה מלמידה.

מושגים מתוכנית הלימודים

התחום המספרי, המבנה העשרוני, מבוא לאלגברה, ערך המקום, סדר פעולות חשבון, המבנה העשרוני, חוק החילוף, מספרים מכוונים, משוואה ריבועית

מיומנויות

חשיבה ביקורתית, שאלת שאלות, עיבוד נתונים, ניתוח נתונים והסקת מסקנות, יצירתיות

אופי הלמידה

זוגות

סוג הפעילות

פעילות להקניית נושא

· "שחר המספרים": <https://bit.ly/2wxn1Ex>

הכנות לקראת הפעילות

- לדאוג למקורן לצפייה בסרטון במליאה.
- לדאוג לשכפול דפים.

מה עושים?

צפו בסרטון הבא: <https://bit.ly/2wxn1Ex> המספר על ההיסטוריה של תחום המספרים ופעולות החשבון.

בפעילות זו נחקור פעולות חשבון, ונמציא פעולות חדשות. לדוגמה, נגדיר פעולת חשבון חדשה שנסמן אותה בסימון: ∇ שהכלל שלה יהיה: כופלים את שני המספרים ומוסיפים למכפלה 1. לדוגמה:

$$5 \nabla 3 = 5 \times 3 + 1 = 16.$$

שימו לב, כי הפעולה ∇ מורכבת משתי פעולות חשבון "רגילות": כפל וחיבור.

במשימות הבאות יוצגו בפניכם פעולות חשבון חדשות, ויהיה עליכם לגלות את הכלל מאחוריהן. אפשרו לתלמידים לעבוד בזוגות. לאחר השלמת המשימה בצעו מליאה כיתתית לחידוד הפתרונות, כדי שיוכלו להבין כיצד להמשיך הלאה למשימות הבאות.

משימה 1: חוקרים את פעולת $\uparrow$

א. גלו את כלל הפעולה $\uparrow$

$$5 \uparrow 4 = 18$$

$$7 \uparrow 13 = 40$$

$$3 \uparrow 5 = 16$$

$$200 \uparrow 5 = 410$$

$$9 \uparrow 9 = 36$$

$$2 \uparrow 1 = 6$$

ב. נסחו במילים את כלל הפעולה שגיליתם:

יש לחבר את שני המספרים ולהכפיל את סכומם (לכפול ב-2).

ג. האם אפשר ליצור תרגיל כך שהתוצאה שתתקבל תהיה אי-זוגית? הסבירו.

יש צורך שיהיה אזכור לביצוע כפולה ב-2, ולכן הדבר לא אפשרי.

ד. כעת פתרו תרגילים על סמך הפעולה שגיליתם:

$$21 \uparrow 18 = \quad \text{ג.}$$

$$30 \uparrow 1 = \quad \text{ב.}$$

$$7 \uparrow 14 = \quad \text{א.}$$

תשובות: א. 42 ב. 62 ג. 78

ה. השלימו את המספרים החסרים:

$$121 \uparrow __ = 274 \quad \text{ג.} \quad __ 11 \uparrow = 28 \quad \text{ב.} \quad 17 \uparrow __ = 42 \quad \text{א.}$$

תשובות: א. 4 ב. 3 ג. 16

הסבירו כיצד פתרתם את התרגילים.

יש לחלק את התוצאה ב-2 ולהחסיר את המספר הנתון.

ו. השלימו את המספרים החסרים:

א. $__ \uparrow __ = 20$ ב. $__ \uparrow __ = 38$

השוו עם חברים לכיתה את הפתרונות. האם קיימת רק אפשרות אחת להשלים את השוויון? אם לא, הציעו לפחות שלוש אפשרויות שונות.

תשובות אפשריות: א. 1,9 7,3 5,5 ב. 19,0 1,18 10,9

ז. שער, האם פעולת $\uparrow$ מקיימת את חוק החילוף? הביאו דוגמאות התומכות בהשערתכם.

פעולת החילוף אכן מתקיימת. למשל: $20 = 3 \uparrow 7$ $20 = 7 \uparrow 3$ מסתמך על כך שבפעולת החיבור (שזו הפעולה שמבצעים על המספרים תחילה) מתקיים חוק החילוף.

ח. השלימו את הטבלה על פי הפעולה $\uparrow$. חלק מהמשבצות מולאו.

	1	2	3	4	5
$\uparrow$					
1		6			
2					
3			12		
4					
5				18	

לאחר מילוי הטבלה, ציינו כמה תכונות וקשרים שמצאתם תוך כדי מילוי הטבלה.

- כל המספרים בלוח הם מספרים זוגיים.
- מספרים שנמצאים באותה שורה מהווים סדרה חשבונית שהפרשה 2.
- מספרים שנמצאים באותו טור הם סדרה חשבונית שהפרשה 2.
- מספרים שנמצאים באותו אלכסון משמאל לימין הם כפולות של 4, ומהווים סדרה חשבונית שהפרשה 4.
- באותו אלכסון מימין לשמאל נמצאים מספרים שווים.
- המספרים בלוח נמצאים בצורה סימטרית ביחס לאלכסון הראשי משמאל לימין (נכון רק לפעולות המקיימות את חוק החילוף).

בשלב זה מומלץ לבצע סיכום ביניים במליאה, ולעבור על התשובות השונות שכתבו התלמידים בעבודה בזוגות.

משימה 2: חוקרים את פעולת \$

ניתן לבצע את חלק זה בשיעור אחר, ולא דווקא ברצף עם משימה 1.

א. גלו את כלל הפעולה \$

$$5 \$ 14 = 95 \qquad 7 \$ 13 = 140 \qquad 33 \$ 5 = 3$$

$$20 \$ 2 = 44 \qquad 9 \$ 0 = 0 \qquad 2 \$ 1 = 3$$

ב. נסחו במילים את כלל הפעולה שגיליתם:

יש לחבר את שני המספרים ולכפול את התוצאה במספר הקטן מבין שני המספרים.

ג. כעת פתרו את התרגילים על סמך הפעולה שגיליתם:

$$21 \$ 8 = \text{ג.} \qquad 32 \$ 1 = \text{ב.} \qquad 17 \$ 14 = \text{א.}$$

תשובות: א. 434 ב. 33 ג. 232

ד. השלימו את המספרים החסרים:

$$12 \$ ___ = 28 \text{ ג.} \qquad ___ \$ 1 = 6 \text{ ב.} \qquad 3 \$ ___ = 42 \text{ א.}$$

הסבירו כיצד פתרתם את התרגילים.

ניתן להסביר על ידי ניסוי וטעייה. לקבוצות מתקדמות אפשר ליצור משוואה ריבועית ולפתור אותה. שימו לב שישנה גם תוצאה שלילית – למשל בסעיף ג', גם המספר 14- הוא תוצאה מתאימה – אפשר לדבר על כך עם קבוצות מתאימות.

תשובות: א. 11 ב. 5 ג. 2.

ה. השלימו את המספרים החסרים:

$$___ \$ ___ = 20 \text{ א.} \qquad ___ \$ ___ = 38 \text{ ב.}$$

השוו עם חבריכם לכיתה את הפתרונות. האם קיימת רק אפשרות אחת להשלים את השוויון? אם לא, הציעו לפחות שלוש אפשרויות שונות.

תשובות אפשריות: א. 2,8 ב. 2,17.

ו. שערו, האם פעולת \$ מקיימת את חוק החילוף? הביאו דוגמאות התומכות בהשערתכם.

פעולת החילוף אכן מתקיימת. למשל: $2 \$ 8 = 20$ $8 \$ 2 = 20$ מסתמך על כך שבפעולת החיבור (שזו הפעולה שמבצעים על המספרים תחילה) מתקיים חוק החילוף, ולאחר מכן בוחרים את הנמוך מביניהם כך שאין זה משנה מה מיקומו.

ז. האם בהכרח פעולת \$ מניבה תוצאה גדולה/קטנה מפעולת $\uparrow$? הסבירו.

אי אפשר לקבוע בהכרח איזו פעולה תניב תוצאה גדולה יותר. הדבר תלוי בבחירת המספרים. אם מדובר במספרים ששניהם גדולים מ-2, אז פעולת \$ תניב תוצאה גדולה יותר; ואם מדובר במספרים קטנים מ-2, אז פעולת $\uparrow$ תניב תוצאה גדולה יותר. כאשר המספר הקטן מבין השניים הוא 2, אז התוצאה תהיה זהה בשני המקרים. למשל: $2 \$ 5 = 2$ $2 \uparrow 5 = 5$.

משימה 3: חוקרים את פעולת ♥

ניתן לבצע את משימה 3 בשיעור נפרד ממשימות 1 ו-2.

א. גלו את כלל הפעולה ♥

$$6 \heartsuit 4 = 12$$

$$5 \heartsuit 7 = 10$$

$$3 \heartsuit 5 = 6$$

$$0 \heartsuit 2 = 0$$

$$9 \heartsuit 0 = 81$$

$$2 \heartsuit 1 = 2$$

ב. נסחו במילים את כלל הפעולה שגיליתם:

למצוא את הפרש שני המספרים (חיסור של הגדול בקטן), ולכפול את התוצאה במספר השמאלי.

ג. כעת פתרו תרגילים על סמך הפעולה שגיליתם:

$$7 \heartsuit 8 = \text{ג.}$$

$$1 \heartsuit 21 = \text{ב.}$$

$$17 \heartsuit 14 = \text{א.}$$

תשובות: א. 51 ב. 20 ג. 7

ד. השלימו את המספרים החסרים:

$$12 \heartsuit __ = 132 \quad \text{ג.} \quad __ \heartsuit 1 = 12 \quad \text{ב.} \quad 3 \heartsuit __ = 24 \quad \text{א.}$$

הסבירו כיצד פתרתם את התרגילים.

ניתן להסביר על ידי ניסוי וטעייה. לקבוצות מתקדמות אפשר ליצור משוואה ריבועית או ממעלה ראשונה (תלוי במקרה), ולפתור אותה.

תשובות: א. 11 ב. 4 ג. 1

ה. השלימו את המספרים החסרים:

א. $_\heartsuit__ = 3$ ב. $_\heartsuit__ = 10$

השוו עם חברכם את הפתרונות. האם קיימת רק אפשרות אחת להשלים את השוויון?
תשובות אפשריות: א. 3,4 ב. 5,3 ג. 1,11.

ו. שער, האם פעולת $\heartsuit$ מקיימת את חוק החילוף? הביאו דוגמאות התומכות בהשערתכם.
פעולת החילוף לא מתקיימת. למשל: $2 \heartsuit 8 = 12$ $8 \heartsuit 2 = 48$ מסתמך על כך שמבצעים מכפלה של הסכום עם המספר השמאלי, ולכן ישנה חשיבות איזה מספר נמצא בצד שמאל ואיזה בימין.

ז. האם בהכרח פעולת $\heartsuit$ מניבה תוצאה גדולה/קטנה מפעולת $\$, \text{?}$ הסבירו.
אי אפשר לקבוע איזו פעולה תניב בהכרח תוצאה גדולה יותר. הדבר תלוי בבחירת המספרים, ובאיזה מספר נמצא בצד שמאל של פעולת ה- $\heartsuit$ ואיזה בצד ימין.

משימה 4: ממצאים פעולה חדשה

ניתן לבצע את משימה 4 בשיעור נפרד ממשימות 1, 2 ו-3.
על כל זוג תלמידים ליצור פעולה משלהם, ולהעביר אותה לזוג אחר בכיתה שישלים את הסעיפים השונים.
הסבירו לתלמידים שאפשר להיעזר במשימות 1-3 כדי להיזכר כיצד ליצור את התרגילים השונים.

כעת תורכם להמציא פעולה.
לאחר שהשלמתם את הסעיפים, העבירו את הפעולה שהמצאתם לזוג אחר כדי שיגלה את כלל הפעולה, ויפתור את השאלות השונות.

א. כלל הפעולה שלכם הוא: _____
הראו כמה דוגמאות המדגימות את כלל הפעולה.

הדגישו לתלמידים שמענה על סעיף זה מיועד לזוג שקיבל את הדף לפתרון.

ב. נסחו במילים את כלל הפעולה שגיליתם: _____

ג. כעת צרו שלושה תרגילים ללא פתרון על סמך הפעולה שגיליתם:

א. _____ ב. _____ ג. _____

ד. צרו תרגילים שבהם ישנו רק מספר אחד מבין שניים, ופתרון. על הזוג המקבל להשלים את המספרים החסרים ולהסביר כיצד מצאו אותם:

א. _____ ב. _____ ג. _____

ה. צרו תרגילים כאשר ישנו רק פתרון, ועל הזוג המקבל להשלים את המספרים החסרים:
(על הזוג המכין את התרגיל לוודא שאכן הפתרון אפשרי.)

א. _____ ב. _____

ו. שערך, האם פעולת _____ מקיימת את חוק החילוף? הביאו דוגמאות התומכות בהשערתכם.