

מתכנתים וחוקרים: תנועת גופים באוויר

שכבת גיל

חטיבה עליונה – כיתה י"א

תקציר הפעילות

בפעילות זו התלמידים עובדים לבד או בזוגות. לאחר צפייה בסרטון המבוא יעזרו התלמידים בתוכנת מקסימה (maxima), תוכנה המאפשרת ביצוע פעולות אלגבריות מורכבות, כדי לבחון מקרים שונים של גופים הנזרקים לאוויר.

משך הפעילות

הפעילות מתאימה לשיעור כפול

מטרות הפעילות

- לבחון את ההשפעה של כוחות קבועים כגון: גרוויטציה וכוח אופקי קבוע על תנועת גופים.
- להכיר את תוכנת מקסימה שמבצעת פעולות אלגבריות מורכבות.
- להשתמש בתוכנת מקסימה לצורך חקירת תנועת גופים באוויר.

מושגים מתוכנית הלימודים

תנועה שוות תאוצה, שדה כבידה (גרוויטציה), תנועה בליסטית, תאוצת הכובד

מיומנויות

שאלת שאלות, עיבוד נתונים, ניתוח נתונים והסקת מסקנות, יצירתיות, פתרון בעיות וקבלת החלטות, רפלקטיביות לתהליך הלמידה, הבניית ידע, יישום ידע

אופי הלמידה

- יחידים
- זוגות

סוג הפעילות

פעילות להקניית נושא

קישור לסרטון

· "תנועה אופקית ואנכית": <https://bit.ly/2tSRQP4>

הכנות לקראת הפעילות

- יש להתקין את תוכנת מקסימה (הורדה בחינם): <http://maxima.sourceforge.net/download.html>
- אין צורך בידע מוקדם בתכנות. ההנחיות לשימוש בתוכנה תינתנה במהלך הפעילות עצמה.
- מומלץ שלתלמידים יהיה ידע מוקדם בנושא של תנועת גופים באוויר – זריקה בזווית.

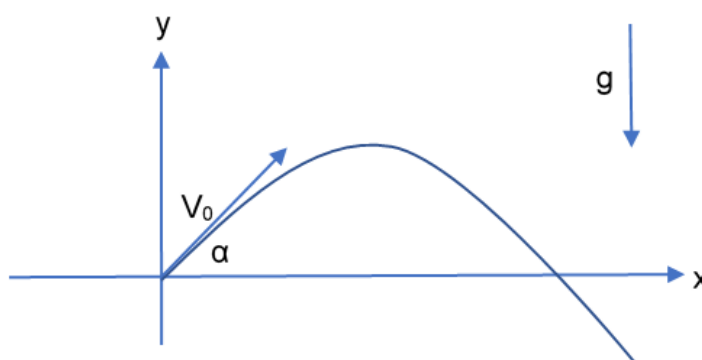
מה עושים?

מתחילים...

לעיתים קרובות השימוש במחשב הכרחי לשם פתרון בעיות פיזיקליות מורכבות. בפעילות זו נכיר את תוכנת מקסימה, שמאפשרת לבצע פעולות אלגבריות על ביטויים מספריים וסימבוליים (פרמטריים). התקנתה של התוכנה פשוטה והורדתה ניתנת בחינם. הפעילות אינה דורשת ידע מוקדם בתכנות. הידע הדרוש לביצוע הפעילות יינתן בהנחיות.

בפעילות זו נדגים כיצד אפשר לחקור את תנועתם של גופים באוויר בעזרת המחשב. נדמה גוף שנזרק במהירות התחלתית שגודלה V_0 , בזווית זריקה α (זווית מעל האופק מוגדרת כחיובית, $\alpha > 0$, זווית מתחת לאופק מוגדרת כשלילית, $\alpha < 0$, זריקה אופקית כאשר: $\alpha = 0$), ונחקור את מסלולו.

בשלב ראשון נניח שהגוף נע בהשפעת שדה גרוויטציה אחיד שמקנה לגופים תאוצה קבועה. במקרה כזה לא פועלים כוחות חיצוניים בכיוון הציר המקביל לקרקע (ציר x). בציר הניצב לקרקע (ציר y) התנועה מושפעת מתאוצת הכובד, g , בלבד (תרשים א').



תרשים א': זריקה בזווית מעל האופק

על הגוף בתרשים א' לא פועלים כוחות חיצוניים בציר x, ולכן פונקציית המיקום זמן בעבור התנועה בציר x ניתנת על ידי הביטוי הבא:

$$\Delta x = V_0 \cdot \cos \alpha \cdot t$$

כאשר Δx מייצג את ההעתק אופקי של הגוף.

בציר y המשקל הוא הכוח היחידי שמשפיע על תנועת הגוף, והוא מקנה תאוצה g בכיוון השלילי. פונקציית המיקום זמן עבור התנועה בציר y ניתנת על ידי הביטוי הבא:

$$\Delta y = V_0 \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

לסיכום העקרונות הפיזיקליים צפו בסרטון הבא: <https://bit.ly/2tSRQP4>.

פתרון אנליטי של משוואת התנועה

הקשה על סמליל (לוגו) התוכנה תפתך מסמך wxMaxima. זהו מסמך דינמי שמאפשר ביצוע חישובים, שילוב של גרפים וטקסט ואפילו תכנות. המסמך בנוי מתאים (cells). לכל תא סוגר שמאלי מרובע שתוחם אותו. כדי להריץ את הפקודות הרשומות בתא יש להציב את סמן העכבר על מקום כלשהו בתא וללחוץ SHIFT+ENTER.



1. (1) הקלידו את שורת הקוד הבאה (יש להקליד את הסימן * בשביל המכפלות בביטוי):

```
eq1:x=v0*cos(alpha)*t;
```

לחצו SHIFT+ENTER כדי לבחון את תגובת המחשב:

```
(%i1) eq1:x=v0*cos(alpha)*t;
```

```
(eq1) x = cos(alpha) t v0
```

כלומר, אל תוך המשתנה eq1 הצבנו משוואה פרמטרית שמתארת את פונקציית המיקום – זמן עבור התנועה בציר x.

(2) נחזור על הפעולה עבור פונקציית המיקום – זמן של התנועה בציר y. לשם כך הקלידו את שורת הקוד הבאה:

```
eq2:y=t*v0*sin(alpha)+a*y*t^2/2;
```

לחצו SHIFT+ENTER כדי לבחון את תגובת המחשב הפעם.

(3) נשתמש בפקודה solve ונחלץ את משתנה הזמן במשוואה eq1:

$$\begin{aligned} & \text{(%i3)} \quad \text{solve(eq1,t);} \\ & \text{(%o3)} \quad \left[t = \frac{x}{\cos(\alpha) v_0} \right] \end{aligned}$$

(4) הפקודה ev מציבה את הביטוי הפרמטרי של הזמן שאותו חילצנו מהמשוואה eq1 בתוך המשוואה eq2:

$$\begin{aligned} & \text{(%i4)} \quad \text{eq3:ev(eq2,solve(eq1,t));} \\ & \text{(eq3)} \quad y = \frac{a_y x^2}{2 \cos(\alpha)^2 v_0^2} + \frac{\sin(\alpha) x}{\cos(\alpha)} \end{aligned}$$

כלומר, זו תגובת המחשב: משתנה eq3, שמכיל בתוכו משוואה. המשתנה הבלתי תלוי במשוואה הוא x והמשתנה התלוי הוא y. הביטוי y(x) (כלומר, y כפונקציה של x) מייצג את משוואת המסלול של הגוף במהלך מעופו באוויר. אפשר לראות שזוהי פונקציה פרבולית (y תלוי ב x וב- x^2).

2. כעת נלמד כיצד אפשר להיעזר בתוכנה כדי לבנות פונקציה שמאחדת לתוכה את כל השלבים שביצענו בסעיף הקודם. העתיקו את הקוד הבא:

```
→ maslol(v0,alpha,ay):=block([eq1, eq2, eq3, y, x, t],
                             eq1:x=t*v0*cos(alpha),
                             eq2:y=t*v0*sin(alpha)+ay*t^2/2,
                             eq3:ev(eq2,solve(eq1,t)),
                             rhs(eq3));
```

הפונקציה maslol (שם הפונקציה נקבע על ידי המשתמש) מקבלת כקלט את המהירות ההתחלתית של הגוף (V_0), זווית השיגור (α) והתאוצה האנכית של הגוף (a_y). בעזרת הפקודה block מאחדים יחד את כל שורות הקוד שמהן מורכבת הפונקציה. בשורה הראשונה רשמים בתוך סוגריים מרובעים את רשימת המשתנים המקומיים (לוקליים). ברגע שהמשתמש נותן שם לפונקציה, מוקצה מקום בזיכרון המחשב עבור המשתנים המקומיים הללו; וברגע שמסתיימת ההרצה של הפונקציה והפלט מחושב, המשתנים הללו נמחקים. השורה האחרונה בקוד מייצגת את הפלט של הפונקציה. במקרה שלנו, הפלט הוא אגף ימין של משוואת המסלול. בשלב זה, כדי להכניס את הפונקציה לזיכרון המחשב, יש ללחוץ SHIFT+ENTER.

כעת נוכל להשתמש בפונקציה כרצוננו. הפונקציה יכולה לקבל ערכים פרמטריים, כמו במקרה הבא:

```
→ maslol(v0,α,-g);
```

בדקו מה תהיה תגובת המחשב במקרה זה.

אפשרות נוספת היא להציב בפונקציה ערכים מספריים, כגון:

```
→ masl(10,%pi/6,-10);
```

שימו לב לכך שבירת המחדל של המקסימה היא שהזוויות ניתנות בראדינים. אפשר להציב את הערך המספרי של π על ידי `pi%`.
בדקו את תגובת המחשב גם הפעם.

3. כדי לחשב את השורשים של משוואת המסלול הקלידו את שורת הקוד הבאה:

```
→ solve(masl(v0,α,-g),x);
```

- (1) מהי תגובת המחשב?
- (2) מתוך בחינת שורשי המשוואה, בעבור איזו זווית זריקה α מתקבל טווח אופקי אופטימלי (כלומר, העתק אופקי מקסימלי)?
תשובה: כאשר $\alpha = 45^\circ$.

4. (1) נתון: $v_0 = 10 \text{ m/s}$, $\alpha = 30^\circ$, $a_y = -10 \text{ m/s}^2$. חשבו בעזרת התוכנה את הטווח האופקי.
תשובה: `masl(10,%pi/6,-10), x=8.66m`

(2) כדי לשרטט את הגרף של משוואת המסלול הקלידו את שורת הקוד הבאה:
`plot2d([masl(10,%pi/6,-10)],x,0,10],[y,-5,5]);`

הציבו את סמן העכבר על המקום המתאים בגרף כדי לוודא שהטווח האופקי שמופיע בגרף זהה לזה שחישבתם בסעיף 4. (1).

5. על אותה מערכת נשרטט צירים גרפיים בעבור משוואות מסלול שונות, באופן הבא:

```
plot2d([masl(10,%pi/3,-10),masl(10,%pi/4,-10),masl(10,%pi/6,-10)],x,0,10],[y,-10,10]);
```

עבור איזה שתי זוויות זריקה מתקבל טווח אופקי זהה? מדוע?
תשובה: 30° ו- 60° , לפי משוואת המסלול.

משוואת המסלול כשפועל כוח אופקי קבוע על הגוף

כשלא פועלים כוחות חיצוניים בציר x, החישוב של משוואת המסלול הוא פשוט. במקרה זה, לפונקציית המיקום-זמן של ההעתק האופקי תלות לינארית בזמן. לכן אפשר לבדוד בקלות את משתנה הזמן, להציבו בביטוי לפונקציית המיקום זמן של ההעתק האנכי ולמצוא ביטוי אנליטי (פתרון אלגברי מדויק) בעבור משוואת המסלול.

בפרק זה נניח שלאורך כל זמן התנועה של הגוף באוויר נושבת רוח שמקנה לגוף תאוצה קבועה, a_x , בכיוון ציר x. במקרה זה פונקציית המיקום זמן של הגוף:

$$\Delta x = V_0 \cdot \cos \alpha \cdot t + \frac{a_x \cdot t^2}{2}$$

התנועה בציר y אינה מושפעת מהכוחות שפועלים על ציר ה-x ואינה משתנה.

במקרה הנוכחי, פונקציית המיקום זמן של ההעתק האופקי תלויה בריבוע הזמן. לכן כשמבודדים את משתנה הזמן מקבלים שני פתרונות. הפתרון האנליטי עשוי במקרה זה עשוי להיות "מסורבל" וקשה ליישום. במצבים כאלה נעדיף לעיתים לבחור בשיטת פתרון נומרית. נדגים זאת בעזרת הדוגמה הבאה:

1. הפונקציה maslol2 מקבלת כקלט את המהירות ההתחלתית, v_0 , זווית הזריקה, α , התאוצה בציר a_x , התאוצה בציר a_y וערך dt שמייצג את "צעדי הזמן".

```
maslol2(v0,ax,ay,alpha,dt):=block([x,y],
x:makelist(v0*cos(alpha)-dt*i+ax*(dt-i)^2/2,i,0,20),
y:makelist(v0*sin(alpha)-dt*i+ay*(dt-i)^2/2,i,0,20),
plot2d([discrete, x,y])
);
```

הפקודה makelist מייצרת סדרת מספרים. כל איבר בסדרה מייצג את ההעתק הגוף ברגע $t=dt \cdot i$, כשהמשתנה i מייצג מספר שלם מתוך תחום מספרים שתחילתו – בדוגמה הזו – בערך 0 וסופו בערך 20. הפונקציה מייצרת את גרף המסלול של הגוף.

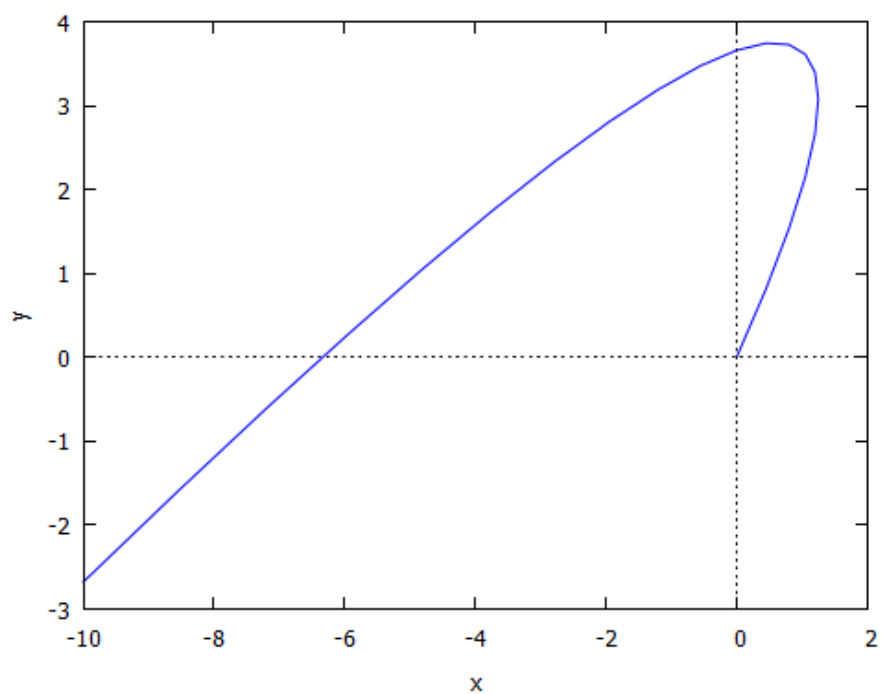
העתיקו את הפונקציה maslol2 למסמך של המקסימה, ולחצו על SHIFT+ENTER כדי להעלות את הפונקציה לזיכרון של המחשב.

הריצו את הפונקציה maslol2 עם הנתונים הבאים: $v_0=10\text{m/s}$, $\alpha=60^\circ$, $a_x=-10\text{m/s}^2$, $a_y=-10\text{m/s}^2$, $dt=0.1\text{s}$.
(1) כיצד נראה גרף המסלול?

תשובה:

```
maslol2(10,-10,-10,%pi/3,0.1);
```

הגרף המתאים למסלול התנועה של הגוף בעבור הנתונים הנ"ל:



(2) בחנו את מסלול התנועה של הגוף בעבור נתונים אחרים לפי בחירתכם.