

מטילים קוביות: הסתברות

שכבת גיל

חטיבת ביניים – כיתות ח'–ט'

חטיבה עליונה – כיתות י'–יא'

תקציר הפעילות

פעילות זו מכילה שלושה חלקים: בחלק הראשון של הפעילות התלמידים והתלמידות יתנסו במקרים שונים של הסתברות, הכוללים הטלת קוביות ויחדדו מושגים בהסתברות. בחלק השני יבצעו ניסוי בזוגות שבתוכו ישנם אלמנטים של משחק. בחלק השלישי והאחרון יתרגלו כמה תרגילים ברמת חטיבה עליונה, אך גם תלמידי חטיבת ביניים יכולים לפתור אותם.

משך הפעילות

שני שיעורים

מטרות הפעילות

- לחזק את מושג ההסתברות באמצעות ניסוי.
- לבסס את יכולת השוואת הסתברויות של מאורעות (גדול, קטן).
- להכיר מושגים בסיסיים בהסתברות (מאורע, מאורע ודאי, מאורע בלתי אפשרי).

מושגים מתוכנית הלימודים

הסתברות, קומבינטוריקה, שברים, טבלת הסתברויות, ניסוי מתמטי

מיומנויות

חשיבה ביקורתית, פתרון בעיות וקבלת החלטות, הבניית ידע, יישום ידע, שיתוף פעולה

אופי הלמידה

כיתתי, זוגות

סוג הפעילות

פעילות להקניית הנושא

קישורים לסרטונים

- "חידת מונטי הול": <https://bit.ly/2EvCO9q>
- "סרטון הרחבה על הסתברויות – הבננה האחרונה": <https://bit.ly/37nH2MJ>
- "הטלת קוביות מיוחדות": <https://bit.ly/332Zabl>

הכנות לקראת הפעילות

- לדאוג לזוג קוביות בצבעים שונים או בגודל שונה, ממוספרות 1-6; שלוש כוסות וכדור.
- להדפיס את ה**נספח** של חלק ב' של הפעילות, לפי מספר התלמידים בכיתה.

מה עושים?



תמונה: ויקיפדיה

חלק א': מתנסים ולומדים מושגים

- בהטלת שתי קוביות נוצרים צירופים שונים של סכומי מספרים. למשל אם נקבל בהטלה 1,6 נוכל לבדוק את סכומם: $1+6=7$. שימו לב שהסכום 7 יכול להתקבל בשני מאורעות שונים בהטלת קוביות עם התוצאה 1,6. פרטו את שני המאורעות.
- 1 בקובייה הראשונה ו-6 בקובייה השנייה.
 - 6 בקובייה הראשונה ו-1 בקובייה השנייה.
- אפשר להדגים זאת לתלמידים בשימוש בקוביות בצבעים שונים. פרטו סכומים שאפשר לקבלם רק במאורע יחיד של הטלת שתי קוביות.
- 12 רק באמצעות 6,6 ו-2 רק באמצעות 1,1.
- פרטו את הצירופים האפשריים בטבלה הבאה, והוסיפו בסוגריים את סכום הקוביות:

קובייה ראשונה							
קובייה שנייה		1	2	3	4	5	6
	1	1,1	2,1	3,1	4,1	5,1	6,1 (סכום 7)
	2	1,2	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2
	3	1,3	2,3	3,3	4,3	5,3	6,3
	4	1,4	2,4	3,4	4,4	5,4	6,4
	5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
	6	1,6 (סכום 7)	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6 (סכום 12)

בסך הכול מדובר בטבלה בגודל 6 על 6: כלומר ישנם 36 צירופים שונים של הטלות אפשריות של שתי קוביות. כעת, התבוננו בסכומי המספרים שנוצרו בהטלת שתי קוביות.

אילו סכומים מופיעים יותר מ-5 פעמים? הסכום 7 מופיע 6 פעמים.

מהי ההסתברות לקבל סכום מספרים 4? $1/12 =$

פרטו את האפשרויות השונות: 3,1 או 2,2 או 1,3

מהי ההסתברות לקבל סכום מספרים 7? $1/6 = 6/36 =$

פרטו את האפשרויות השונות: 1,6 או 2,5 או 3,4 או 4,3 או 5,2 או 6,1

הציעו מאורע שלא יכול להתרחש כשנטיל שתי קוביות. כל סכום מעל 12.

מאורע מסוג זה נקרא "מאורע בלתי אפשרי".

הציעו מאורע שאפשר שיתרחש כשנטיל שתי קוביות. למשל לקבל שני מספרים ראשוניים.

מאורע מסוג זה נקרא "מאורע אפשרי".

הציעו מאורע שיתרחש בוודאות כשנטיל שתי קוביות. למשל לקבל שני מספרים שלמים.

מאורע מסוג זה נקרא "מאורע ודאי".

הסתברות היא פונקציה המתאימה לכל מאורע מסוים את האפשרות שיתרחש. הסתברות מוגדרת בתור מספר בין 0 ל-1.

מאורע בלתי אפשרי הוא בעל הסתברות 0, ומאורע ודאי הוא בעל הסתברות 1.

התחלקו לזוגות בהתאם להנחיית המורה.

1. על כל תלמיד להציע, בשורת "ההצעה שלי", כמה פעמים מתוך 30 הטלות סה"כ יופיע כל סכום בהטלת שתי קוביות. למשל: אם לדעתכם סכום ההטלות 7 יופיע שלוש פעמים מתוך 30 הטלות, יש לרשום "3" במשבצת שנמצאת בעמודה 7 ובשורה של "ההימור שלי".
2. על כל זוג להטיל זוג קוביות 30 פעמים, לבדוק את סכומן ולסמן נקודה בעמודה המתאימה. למשל אם הוטל זוג קוביות והתקבל: 2,5, תוצאת הסכום היא 7, ולכן יש לסמן נקודה בעמודה שבה מופיע המספר 7, וכך הלאה.
3. לאחר סיום הניסוי יש לרשום את הפער בין ההצעה לתוצאה הסופית בכל עמודה. התלמיד עם ההפרש הכולל הקטן ביותר הוא המנצח. למשל אם בעמודה של סכום 11 הצעתי 4 נקודות ולבסוף ישנן 7 נקודות, אז ההפרש הוא 3 נקודות "רעות" שצברתי.

על מנת לחסוך הבאת קוביות לכלל התלמידים, הם יכולים להשתמש בקישור זה כדי לבצע הטלת קוביות באקראי.
הטלת קוביות וירטואלית: <https://bit.ly/1pisSoi>.

[illegible]

כתבו את מסקנותיכם מהניסוי.

במסקנות חשוב שהתלמידים ישימו לב לסכומים בעלי הסתברות גבוהה יחסית לעומת סכומים עם הסתברות נמוכה, ואיך הדבר בא לידי ביטוי בניסוי. אם הייתה הטיה קלה בתוצאות לעומת ההסתברויות, אפשר לדבר איתם על כך שבוצעו רק 30 הטלות, ואם יתבצע עוד ועוד הטלות ההסתברות תתאזן. אפשר להדגים זאת בעזרת הסרטון "קוביות מיוחדות" שבקישור הבא: <https://bit.ly/332Zabl>.

מומלץ לדבר על כך שמי ששם את כל הנקודות במאורעות בעלי הסתברות גבוהה בלבד (למשל אלו ששמו את כל הניקוד שלהם על סכום 6,7,8) החמיץ כמעט בוודאות סכומים אחרים שמתקבלים, ושהאידיאל הוא לפזר את הניקוד בהתאם להסתברות של כל אחד. למשל סכום 3 יכול להתקבל בהסתברות של $2/36$ (מתקבל מ-1,2 או 2,1) שהם $1/18$, ומכיוון שמטילים 30 פעמים הצפי הוא שיתקבל סכום 3 בין 1–2 פעמים. לכן 'הימור' נכון יהיה לשים 1–2 נקודות עבור סכום 3. בכוונה לא בוצעו 36 הטלות, כדי לא לרמח על כך שצריך לתת ניקוד בדיוק בהתאם להסתברות.

חלק ג': תרגילים נוספים מתוך מאגר שאלון 801

1. בקופסה נמצאים 1,500 כדורים בשלושה צבעים: שחור, כחול ואדום.

ידוע כי בקופסא יש 600 כדורים שחורים ו-450 כדורים כחולים.

א. מה ההסתברות להוציא כדור שחור? 0.4

אפשר להוסיף שאלה כתיווך: כמה כדורים בצבע אדום נמצאים בקופסה? 450

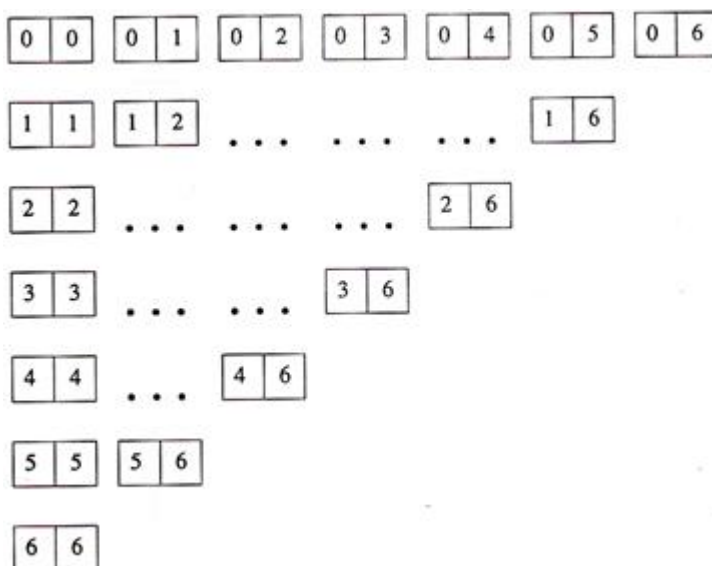
ב. מה ההסתברות להוציא כדור אדום? 0.3

ג. הציעו דוגמה למאורע אפשרי. להוציא כדור כחול

2. במשחק דומינו 28 אבנים שונות.

על כל אחת מהאבנים רשומים שניים מבין המספרים 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

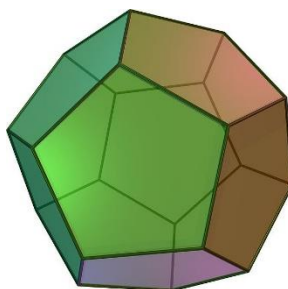
אבני הדומינו נראות כך:



בוחרים באקראי אבן אחת מבין 28 אבני הדומינו.

- א. מהי ההסתברות שעל האבן שבחרתם יהיו רשומים שני מספרים 6,6? $1/28$
- ב. מהי ההסתברות שעל האבן שבחרתם יהיו רשומים שני מספרים שווים ("דאבל")? $1/4 = 7/28$
- ג. מהי ההסתברות שעל האבן שבחרתם יהיו רשומים שני מספרים שסכומם הוא 7? $3/28$
- ד. מהי ההסתברות שעל האבן שבחרתם יהיו רשומים שני מספרים שמכפלתם היא 6? $1/14 = 2/28$
- ה. הציעו דוגמה למאורע ודאי. לדוגמה: ההסתברות לקבל שני מספרים שלמים.

3. תריסרון (דודקהדר) הוא גוף משוכלל ובו 12 פאות, שהן מחומשים משוכללים חופפים.



מתוך: ויקיפדיה

על הפאות רשומים מספרים מ-1 עד 12. מטילים את התריסרון פעם אחת.

1. מה ההסתברות לקבל מספר זוגי? $1/2$
2. מה ההסתברות לקבל מספר המתחלק ב-5? $1/6 = 2/12$
3. מה ההסתברות לקבל מספר המתחלק ב-7? $1/12$
4. הציעו דוגמה למאורע בלתי אפשרי. למשל: ההסתברות לקבל מספר שמתחלק ב-13.

למעוניינים אפשר להרחיב, ולחשוף את הכיתה לחידת מונטי הול: <https://bit.ly/2EvCO9q>.

אפשר לקרוא על בעיה זו גם כאן: <https://bit.ly/2AKpXwk>.

מומלץ לבצע ניסוי זה בכיתה בעזרת שלוש כוסות אטומות, שכדור מוחבא באחד מהן, ולבצע את אותו תהליך כפי שמבוצע בחידת מונטי הול המקורית. כדאי לבצע את המשחק מספר רב של פעמים, במטרה להראות שמבחינה הסתברותית אכן יש צורך להחליף את הבחירה כדי להגביר את הסיכוי לחשוף את הכדור. אפשר לחלק את הכיתה לקבוצות של 2-3 תלמידים: בכל קבוצה מבצעים את המשחק 10 פעמים, אוספים את הנותנים של כולם וסוכמים על הלוח את התוצאות.

נספח להדפסה

חלק ב': ניסוי סכום ההטלות – משחק בזוגות

התחלקו לזוגות בהתאם להנחיית המורה.

- על כל תלמיד להציע בשורת "ההצעה שלי" כמה פעמים מתוך 30 הטלות סה"כ יופיע כל סכום בהטלת שתי קוביות. למשל: אם לדעתכם סכום ההטלות 7 יופיע שלוש פעמים מתוך 30 הטלות יש לרשום "3" במשבצת שנמצאת בעמודה 7 ובשורה של "ההימור שלי".
- על כל זוג להטיל זוג קוביות 30 פעמים, לבדוק את סכומן ולסמן נקודה בעמודה המתאימה. למשל אם הוטל זוג קוביות והתקבל: 5,2, תוצאת הסכום היא 7, ולכן יש לסמן נקודה בעמודה שבה מופיע המספר 7 וכך הלאה.
- לאחר סיום הניסוי יש לרשום את הפער בין ההצעה לתוצאה הסופית בכל עמודה. התלמיד עם ההפרש הכולל הקטן ביותר הוא המנצח. למשל, אם בעמודה של סכום 11 הימרתי 4 נקודות ולבסוף ישנן 7 נקודות, אז ההפרש הוא 3 נקודות "רעות" שצברתי.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	סכום ההטלות:
											ההצעה שלי:

כתבו את מסקנותיכם מהניסוי.