

מהם הסיכויים? מבוא להסתברות

שכבת גיל

חטיבת ביניים - כיתות ח'–ט'

תקציר הפעילות

פעילות זו מהווה מבוא לבעיות בהסתברות, ומתקשרת לנושא הסתברות וקומבינטוריקה בתוכנית הלימודים. אפשר לבצע את הפעילות לאחר שהתלמידים כבר נחשפו לנושא או כפתיח לנושא הסתברות. אפשר לבצע פעילות זו גם בחטיבת הביניים, וגם בחטיבה העליונה כתזכורת לנושא. הפעילות מתבססת על ההבנה האינטואיטיבית של חישוב סיכויים במטרה לבנות את מערכת המושגים הקשורים להסתברות. התלמידים יגיעו לגילוי תוך כדי פתרון בעיות ודיון בקבוצות או במליאה.

משך הפעילות

שני שיעורים

מטרות הפעילות

- להבין את המושג הסתברות.
- להכיר מושגים כמו מאורע ודאי, מאורע אפשרי, מאורע בלתי אפשרי.
- לדעת לזהות מאורעות שווי סיכוי.
- ללמוד להעלות השערה ולבדוק אותה באמצעות הכלים שאותם ירכשו התלמידים.

מושגים מתוכנית הלימודים

הסתברות, קומבינטוריקה, תוצאה יסודית, תוצאה מורכבת, שברים, אחוזים

מיומנויות

הבניית ידע, פתרון בעיות וקבלת החלטות, יישום ידע

אופי הלמידה

צוותי, כיתתי

סוג הפעילות

פעילות להקניית הנושא

קישורים לסרטונים

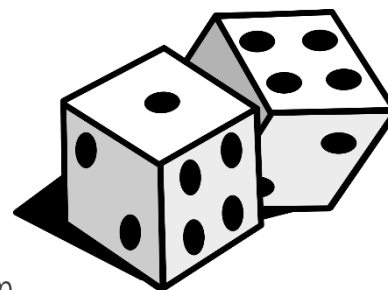
כל אחד מהסרטונים הבאים:

- "חידת מונטי הול": <https://bit.ly/2EvCO9q>
- "חידת מונטי הול", סרטון נוסף: <https://bit.ly/2g9ozvV>
- "חידת מונטי הול בעברית": <https://bit.ly/2Bek0HY>

הכנות לקראת הפעילות

- לדאוג לזוג קוביות משחק לכל קבוצה של 4 - 5 תלמידים.
- להכין כמות כרטיסיות לפי כמות הקבוצות בכיתה. קישור ל**כרטיסיות**.
- לדאוג למקור להצגת הסרטון בכיתה.

מה עושים?



מתוך: ויקיפדיה

חלק א': מטילים קוביות ומתנסים בהסתברות

שאלו את התלמידים מה הם יודעים על התחום שנקרא "תורת ההסתברות"? הקשיבו להצעות ולרעיונות שהם מעלים.

תשובה אפשרית: תורת ההסתברות היא תחום מתמטי, שעוסק בשאלות של הערכת סיכויים וסיכונים בתנאים שיש בהם אקראיות ואי-ודאות. במילים אחרות, הסתברות היא הסיכוי לקבל תוצאה מסוימת.

אילו מצבים אתם מכירים מהחיים שאין אנו יודעים מראש מה תהיה תוצאתם?
גם אם התלמידים מציעים הצעות שאינן בדיוק רלוונטיות לתורת ההסתברות, קבלו זאת. המטרה היא לעורר חשיבה על מצבים לא ודאיים.

משחק בקבוצות: "הטלת קוביות"

חלקו את התלמידים לקבוצות. הפעילות מתוכננת לקבוצות של 2 – 4 תלמידים.
אם נוצרה קבוצה של חמישה תלמידים, על חברי הקבוצה ליצור כרטיסייה נוספת ולרשום אותה בטבלה.

- התחלקו לקבוצות לפי הנחיית המורה. על כל קבוצה לקבל זוג קוביות וכרטיסיות.
- יש לחלק כרטיס לכל משתתף ומשתתפת באופן אקראי. בכל סבב על משתתף אחר להטיל את זוג הקוביות.
- כל פעם שזוג הקוביות מקיים את התנאי הכתוב על הכרטיסייה, המשתתף יקבל נקודה.
- המטרה היא לצבור את מספר הנקודות הרב ביותר לאחר 15 סבבים.
- עליכם לרכז את הנתונים בטבלה.

כרטיסיות

כרטיסייה 1	תנאי לניצחון: אם בהטלת שתי קוביות תתקבל מנה קטנה מ-7.
כרטיסייה 2	תנאי לניצחון: אם בהטלת שתי קוביות תתקבל המכפלה 21.
כרטיסייה 3	תנאי לניצחון: אם בהטלת שתי קוביות יתקבל הפרש 0.
כרטיסייה 4	תנאי לניצחון: אם בהטלת שתי קוביות יתקבל הסכום 6.

- לסיכום, רכזו את הנתונים בטבלה הבאה.
- כתבו לכל מקרה: האם הוא מתקיים תמיד, אף פעם או לפעמים.
- המציאו מקרה נוסף לכל קטגוריה.

מקרה	מתקיים תמיד	אף פעם לא מתקיים	מתקיים לעיתים
כרטיסייה 1			
כרטיסייה 2			
כרטיסייה 3			
כרטיסייה 4			
מקרה נוסף			

קיימו דיון כיתתי: (ניתן לתת את השאלות לתלמידים שיענו בקבוצה לאחר מספר סבבים.)

א. האם המשחק הוגן?

ב. האם לכולם יש סיכוי שווה לנצח?

ג. האם יש מישהו שלא יכול לנצח?

ד. לאיזה מקרה יש את סיכוי הגבוה ביותר?

ה. האם יש הבדל בין כרטיסייה 3 לכרטיסייה 4? (ניתן לפרט בקצרה את ההסתברות לכרטיסייה 3, שהיא לבסוף $1/6$ לעומת כרטיסייה 4 שהיא $5/36$.)

חלק ב': סוגי תוצאות

1. הטילו קוביית משחק רגילה. אילו תוצאות יכולות להתקבל? 1, 2, 3, 4, 5, 6.
 2. א. ישנו שק עם חמישה כדורים ממוספרים מ-1-5. מוציאים מהשק כדור אחד באופן אקראי (הכוונה מבלי לראות, לשלוף באופן מקרי). איזה כדור יכול להיות שיצא? 1 - 5.
ב. מהי ההסתברות לקבל את הכדור הממוספר בספרה 2? 1/5.
- הזכירו לתלמידים את משמעות כתיבת השבר. במונה תופיע קבוצת כל המאורעות שאנחנו מעוניינים לדעת מה הסיכוי שיקרו; המכנה מייצג את כמות המאורעות האפשריים.

תוצאה יסודית ותוצאה מורכבת

המטרה כאן היא למנוע טעויות נפוצות, כמו למשל "מספר יכול להיות או מתחלק ב-3 או לא; ולכן ההסתברות היא חצי-חצי", או טעויות שגויים דומים. המושגים המוצגים אמורים לעזור בהפרדה הזאת.

כשאומרים לנו שבהטלת קובייה "התוצאה היא מספר אי-זוגי", אין הכוונה לכך שעל הפאה של הקובייה כתובות המילים "מספר אי-זוגי". האירוע "יצא מספר אי-זוגי" מתייחס לאחת מבין כמה תוצאות אפשריות של הטלת הקובייה. מה יכול להיות המספר שהתקבל בהטלה? 1, 3, 5.

במקרה כזה לתוצאה קוראים "תוצאה מורכבת", זאת מכיוון שהיא מורכבת מכמה תוצאות שונות. לעומתה, תוצאה שיכולה להתקבל ישירות בניסוי, ושאינה מורכבת מתוצאות אחרות, נקראת "תוצאה יסודית".

במקרה של סביבון: אם הסביבון הראה את האות "נ", מהו סוג התוצאה? **תוצאה יסודית**, מכיוון שאינה מורכבת מעוד תוצאות. לעומת זאת אם נאמר שהתוצאה הראתה אות שהיא בין א ל-י, מהי התוצאה כעת? **או שהסביבון הראה את האות ג, או שהראה את האות ה; לכן זוהי תוצאה מורכבת.**

חלק ג': ודאות של תוצאות

ברולטה יש 12 גזרות בגדלים שווים, הממוספרות מ-1-12 (ניתן לצייר על הלוח):

- הגזרות הממוספרות מ-1 עד 4 צבועות באדום.
- הגזרות מ-5 עד 8 צבועות בלבן.
- הגזרות מ-9 עד 12 צבועות בירוק.

מסובבים את מחוג הרולטה. המחוג יעצור בגזרה כלשהי באופן אקראי. כתבו שתי דוגמאות לתוצאות יסודיות, ושתי דוגמאות לתוצאות מורכבות שיכולות להתקבל בניסוי זה.

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____

כעת נגדיר סוגי תוצאות אפשריות: תוצאה ודאית, תוצאה בלתי אפשרית, תוצאה אפשרית:

- תוצאה שבוודאות תתרחש נקראת "תוצאה ודאית".
- תוצאה שבוודאות לא תתרחש נקראת "תוצאה בלתי אפשרית".
- תוצאה שיכולה להתרחש או לא להתרחש נקראת "תוצאה אפשרית".

בהטלת קוביית משחק, קבעו לגבי התוצאות הבאות: האם אפשר לדעת מראש אם התוצאה תתרחש או לא? אפשרו לתלמידים לענות בקבוצות, לאחר מכן עברו על התשובות והרחיבו גם לכתיבת ההסתברות של כל מקרה.

- מקרה 1:** הקובייה תראה את הספרה 4. _____ תוצאה אפשרית.
- בהזדמנות זו נשאל אם זו תוצאה יסודית או מורכבת, ההסתברות שלה $1/6$.
- מקרה 2:** הקובייה תראה מספר קטן מ-7. _____ תוצאה ודאית.
- בהזדמנות זו נשאל אם זו תוצאה יסודית או מורכבת, ההסתברות שלה 1.
- מקרה 3:** הקובייה תראה מספר גדול מ-10. _____ תוצאה בלתי אפשרית. הסתברות 0.

הציעו עוד מקרה וכתבו מהו סוג התוצאה:

חלק ד': כתיבת הסתברות, טווח הסתברות, השוואה בין הסתברויות

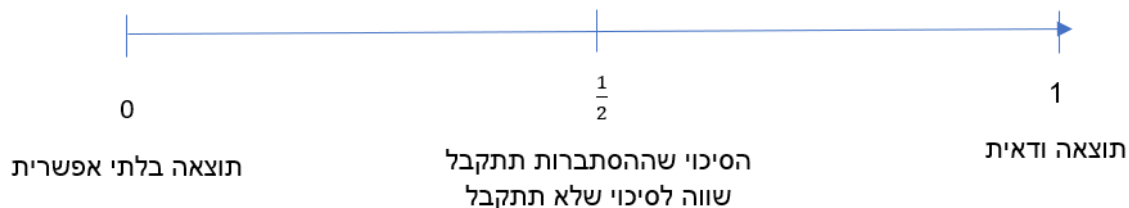
- כאשר אנו בטוחים שמהו יתרחש אנו אומרים שזה יקרה במאה אחת: מכאן שהסיכוי של תוצאה ודאית להתרחש הוא 100%, או שאפשר לומר שהסתברות היא 1. ($1=100/100=100\%$).
- כאשר אנו בטוחים שמהו לא יקרה, אנו אומרים ש"אין סיכוי": מכאן שהסיכוי של תוצאה בלתי אפשרית להתרחש הוא 0.
- מכאן אנו רואים שסיכוי של תוצאה אפשרית להתרחש הוא גדול מ-0, אך קטן מ-1. ההסתברות מבוטאת על ידי מספר בין 0 ל-1.

ענו על השאלות הבאות:

- מטילים קובייה פעם אחת.
 - מה ההסתברות לקבל את הספרה 5? $\frac{1}{6}$
 - מה ההסתברות לקבל מספר זוגי? $\frac{1}{2}$
 - מה ההסתברות לקבל את הספרה 7? 0

כשמסובבים סביבון, הסיכוי שתתקבל אות הנמצאת במילה "פג" שווה לסיכוי שתוצאה זו לא תתקבל. האותיות הן נ, ג, ה, פ, ובמילה "פג" יש את אותיות פ, ג. מכאן שהסיכוי של תוצאה שהיא ג או פ הוא 2 אותיות מתוך 4. סיכוי זה זהה לסיכוי שנקבל את האותיות האחרות: ה או נ, שהן גם 2 אותיות מתוך 4. כשאנו מעריכים שהסיכוי שמאורע כלשהו יקרה שווה לסיכוי שהמאורע לא יקרה, אנו נוהגים לומר בשפה היומיומית שהסיכוי הוא "חצי-חצי".

אפשר לראות את אפשרויות ההסתברות השונות על ציר מספרים:



מומלץ להשתמש בציר ההסתברויות ולשאל את התלמידים על ניסויים שונים שיכולים להתאים למיקומים שונים על הציר. לדוגמה: קבלת תוצאה 2 בהטלת קובייה תהיה בין 0 ל-0.5.

כדי לקבל החלטה נכונה במצב של אי-ודאות, לא די לקבוע אילו תוצאות יכולות להתקבל. חשוב גם להבין איזו מבין התוצאות האפשריות היא "אפשרית יותר" ואיזו "אפשרית פחות". כלומר יש צורך בהשוואה בין הסתברויות של תוצאות שונות.

לאיזו משתי התוצאות יש הסתברות גדולה יותר? כשמטילים קובייה, הסיכוי שיתקבל מספר ראשוני או הסיכוי שהתוצאה תהיה מספר המתחלק ב-3?

במספרים ראשוניים יש לנו את 2, 3, 5. במספרים שמתחלקים ב-3 יש לנו את 3, , ולכן ההסתברות הגדולה יותר תהיה שיתקבל מספר ראשוני.

חלק ה': חידת מונטי הול

מומלץ לתת לתלמידים לעבוד בזוגות כעשר דקות, כדי שיגבשו את דעתם לגבי ההימור המומלץ בתרחיש שבסרטון, ולאחר מכן להציג את כל הסרטון.

צפו בזוגות עד 0:17 דקות בסרטון של חידת מונטי הול שבקישור הבא: <https://bit.ly/2EvCO9q>, ודונו על ההימור הטוב ביותר, בעזרת השאלות הבאות:

- האם "לזכות בפרס" הוא תוצאה יסודית או מורכבת? אם מורכבת, מה הן התוצאות היסודיות שמרכיבות אותה?
- האם יש אירוע ודאי או בלתי אפשרי בתרחיש המוצג בסרטון?
- לגבי אילו תוצאות אתם בטוחים בהסתברות, ולגבי אילו יש סימני שאלה והתלבטות?

גבשו את דעתכם והתכוונו לשיתוף במליאה.

שאלות אפשריות לדיון על החידה:

- האם "לזכות בפרס" הוא תוצאה יסודית או מורכבת? אם מורכבת, מה הן התוצאות היסודיות המרכיבות אותה?
- האם יש אירוע ודאי או בלתי אפשרי בתרחיש המוצג בסרטון?
- לגבי אילו תוצאות אתם בטוחים בהסתברות, ולגבי אילו יש סימני שאלה והתלבטות?